ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°41

Exercice 1 (***)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \ln(t)\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 2 (***)

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+\ldots+t^{n-1}}$$

Déterminer un développement asymptotique à trois termes de u_n par rapport à $\dfrac{1}{n}$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 3 (***)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \cos\left(\frac{t}{n}\right)^{n^2} \,\mathrm{d}t$$

Exercice 4 (**)

Soit $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;+\infty\,[$. On pose
$$u_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(x+k)} \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{I}_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \,\mathrm{d}t$$

1. Justifier que $\Gamma(x)$ est bien définie pour $x > 0$.
2. Montrer $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{I}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(x)$$
3. En déduire un équivalent simple de $u_n(x)$ pour $x > 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 5 (**)

Montrer
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2+1)}$$

Exercice 6 (***)

On pose
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$$

1. Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, déterminer une expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ avec des factorielles.
2. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum \dfrac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

Exercice 7 (***)

On pose $\quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^p \cos(t)^n \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_p = \int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t$

1. Justifier la convergence de l'intégrale définissant I_p pour p entier.

2. Établir
$$n^{\frac{p+1}{2}} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{I}_p$$

Exercice 8 (****)

On pose $\qquad \forall n \geqslant 2 \qquad u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$

1. Justifier que la suite $(u_n)_n$ est bien définie puis déterminer un développement asymptotique à trois termes pour $n \to +\infty$.
2. Montrer la convergence de la série $\sum (u_n - 1)$ puis déterminer un équivalent simple de son reste d'ordre n.

Exercice 9 (****)

On rappelle l'existence de la constante γ d'Euler définie par
$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$.