Feuille d'exercices n°42

Exercice 1 (***)

Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_0^1 t^n \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

Indications : Utiliser l'inégalité $1-v^n \leqslant n(1-v)$ pour $v \in [\,0\,;1\,]$.

Exercice 2 (***)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{1}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$$

Indications : Utiliser l'inégalité $(1+u)^n \geqslant 1+nu$ pour $u \geqslant 0$.

Exercice 3 (***)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{t\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t$$

Indications : Établir
$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad \ln(1-x) \leqslant -x-\frac{x^2}{2}$$

Exercice 4 (****)

Soient les suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ avec $a \geqslant b > 0$ et
$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

On pose
$$\mathrm{I}(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

1. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_n \leqslant a_n$$
En déduire la monotonie des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ puis leur convergence vers une limite commune notée $\mathrm{M}(a,b)$.
2. Justifier la convergence de l'intégrale $\mathrm{I}(a,b)$.
3. Avec le changement de variables $t = \dfrac{1}{2}\left(u-\dfrac{ab}{u}\right)$, établir
$$\mathrm{I}\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \mathrm{I}(a,b)$$
4. Montrer
$$\mathrm{I}(a,b) = \frac{\pi}{\mathrm{M}(a,b)}$$

Indications : 1. Utiliser le fait que $(x-y)^2 \geqslant 0$ avec x et y réels positifs. Invoquer le théorème de limite monotone pour chaque suite et montrer l'égalité de leurs limites.
3. Effectuer courageusement le changement de variable indiqué sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
4. Considérer la suite $(\mathrm{I}(a_n,b_n))_n$ et conclure par convergence dominée.

Exercice 5 (**)

Établir
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t - 1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Indications : Faire apparaître une somme géométrique dans l'intégrale puis utiliser l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant t$ avec $t \geqslant 0$ pour l'intégration terme à terme.

Exercice 6 (***)

En considérant $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\, dt$ pour n entier, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}\, du$.

Indications : Pour n entier non nul, utiliser le changement de variables $u = t^n$ puis utiliser l'inégalité $1 - v^n \leqslant n(1-v)$ pour $v \in [\,0\,;1\,]$. Écrire ensuite l'intégrale d'origine avec des sommes de Riemann.

Exercice 7 (***)

Déterminer la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1 + t + \ldots + t^{n-1}}\, dt$.

Indications : Après le changement de variable $u = t^n$, mettre en valeur l'expression $n(1 - u^{\frac{1}{n}})$ dans la nouvelle intégrale.