ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°31

Exercice 1 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que si $\mathrm{B}_f(0,1)$ est compacte, alors $\mathrm{S}(0,1)$ l'est aussi.

Corrigé : L'ensemble $\mathrm{S}(0,1)$ est un fermé inclus dans le compact $\mathrm{B}_f(0,1)$ d'où

$$\boxed{\text{La sphère unité } \mathrm{S}(0,1) \text{ est compacte.}}$$

Exercice 2 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et K un compact et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

1. Montrer que si F est un compact, alors $\mathrm{F}+\mathrm{K}$ est un compact.
2. Montrer que si F est fermé, alors $\mathrm{F}+\mathrm{K}$ est un fermé.

Corrigé : 1. Soit $(x_n)_n \in (\mathrm{F}+\mathrm{K})^{\mathbb{N}}$. Il existe $((a_n,b_n))_n\,(\mathrm{F}\times\mathrm{K})^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n = a_n + b_n$ pour tout n entier. Par compacité de $\mathrm{F}\times\mathrm{K}$, il existe φ extractrice telle que

$$(a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (a,b) \in \mathrm{F}\times\mathrm{K}$$

Ainsi
$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a+b \in \mathrm{F}+\mathrm{K}$$

On conclut
$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{F}+\mathrm{K} \text{ est compact.}}$$

Variante : Considérons $f : \mathrm{E}^2 \to \mathrm{E}, (x,y) \mapsto x+y$. L'application f est linéaire et on a

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f(x,y)\| \leqslant \|x\| + \|y\| = \|(x,y)\|_1$$

d'où sa continuité. L'ensemble $\mathrm{F}\times\mathrm{K}$ est compact comme produit de compacts et par conséquent, l'ensemble $f(\mathrm{F}\times\mathrm{K}) = \mathrm{F}+\mathrm{K}$ est compact.

2. Soit $(x_n)_n \in (\mathrm{F}+\mathrm{K})^{\mathbb{N}}$ convergente. Il existe $(a_n)_n \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_n \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n = a_n + b_n$ pour tout n entier. Par compacité de K, il existe φ une extractrice telle que $b_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} b \in \mathrm{K}$. Par suite, on a la convergence de $(a_{\varphi(n)})_n$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - b_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a = x - b$$

et par fermeture de F, il vient que $a = x - b \in \mathrm{F}$ d'où $x = a + b \in \mathrm{F}+\mathrm{K}$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{F}+\mathrm{K} \text{ est fermé.}}$$

Exercice 3 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de E et $\mathrm{K} = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n$. Montrer que l'ensemble K est un compact non vide.

Corrigé : On a
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists x_n \in \mathrm{K}_n$$

La suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans K_0 en particulier donc il existe une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathrm{K}_0$. Pour p entier, la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant p}$ est à valeurs dans le fermé K_p puisque $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout n entier et par conséquent, la suite extraite converge dans K_p et ce pour tout p entier d'où $x \in \mathrm{K}$. Par ailleurs, l'ensemble K est fermé comme intersection de fermés donc compact comme fermé dans le compact K_0. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble K un compact non vide.}}$$

Exercice 4 (**)

Soient E, F des evn, $f \in \mathscr{C}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $(\mathrm{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts de E.

Montrer que
$$f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(\mathrm{K}_n)$$

Corrigé : On suppose les compacts K_n non vides sinon le résultat est trivial. On a clairement $f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(\mathrm{K}_n)$. Soit $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(\mathrm{K}_n)$. Pour tout n entier, il existe $x_n \in \mathrm{K}_n$ tel que $y = f(x_n)$. La suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans le compact K_0 donc il existe une extractrice φ tel que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathrm{K}_0$. Par continuité, on a donc $y = f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$. Pour p entier, la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant p}$ à valeurs dans le fermé K_p puisque $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout n entier et par conséquent, la suite extraite converge dans K_p et ce pour tout p entier. On en déduit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n$ et on conclut

$$\boxed{f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(\mathrm{K}_n)}$$

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et K un compact. Pour $r > 0$, montrer que $\mathrm{F} = \bigcup_{x\in\mathrm{K}} \mathrm{B}_f(x, r)$ est un fermé.

Corrigé : Soit $(y_n)_n \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ avec $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Pour tout n entier, il existe $x_n \in \mathrm{K}$ tel que $y_n \in \mathrm{B}_f(x_n, r)$. Il existe une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$\|y - x\| \leqslant \|y - y_{\varphi(n)}\| + \|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - x\| \leqslant r + \mathrm{o}(1)$$

Passant à la limite, on obtient $\|y - x\| \leqslant r$ d'où $y \in \mathrm{B}_f(x, r)$ d'où

$$\boxed{\text{L'ensemble F est un fermé.}}$$

Exercice 6 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et A, B des compacts de E. Montrer que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est compact.

Corrigé : Soit $(x_n)_n \in (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^{\mathbb{N}}$. On a

$$\mathbb{N} = x^{-1}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = x^{-1}(\mathrm{A}) \cup x^{-1}(\mathrm{B})$$

donc un des deux ensembles est infini. Supposons $x^{-1}(\mathrm{A})$ infini. Il existe donc une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ est à valeurs dans le compact A. Par conséquent, il existe une autre extractrice ψ telle que $(x_{\varphi\circ\psi(n)})_n$ converge. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \text{ est compact.}}$$

Exercice 7 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que si $\mathrm{S}(0,1)$ est compacte, alors $\mathrm{B}_f(0,1)$ l'est aussi.

Corrigé : Soit $(x_n)_n \in \mathrm{B}_f(0,1)^{\mathbb{N}}$. Si la suite stationne à 0 à partir d'un certain rang, alors 0 est valeur d'adhérence. Dans le cas contraire, on peut supposer, quitte à extraire, que la suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans $(\mathrm{B}_f(0,1) \smallsetminus \{0\})^{\mathbb{N}}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$$

La suite $(y_n)_n$ est à valeurs dans le compact $\mathrm{S}(0,1)$. Ainsi, il existe φ extractrice telle que $(y_{\varphi(n)})_n$ converge vers un $y \in \mathrm{S}(0,1)$. Par ailleurs, la suite $\left(\|x_{\varphi(n)}\|\right)_n$ est à valeurs dans le compact $[\,0\,;1\,]$ et donc il existe une extractrice ψ telle que

$$\|x_{\varphi\circ\psi(n)}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \in [\,0\,;1\,]$$

Il s'ensuit
$$x_{\varphi\circ\psi(n)} = \|x_{\varphi\circ\psi(n)}\| y_{\varphi\circ\psi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha y$$

On conclut
$$\boxed{\text{Si } \mathrm{S}(0,1) \text{ est compacte, alors } \mathrm{B}_f(0,1) \text{ l'est aussi.}}$$

Exercice 8 (**)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_n$ et X des variables aléatoires discrètes à valeurs dans un compact K de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{K}, \mathbb{R})$. Montrer

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|f(\mathrm{X}_n) - f(\mathrm{X})| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Corrigé : La fonction f est continue sur le compact K donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{K}^2 \qquad |x-y| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Par contraposée
$$\forall (x,y) \in \mathrm{K}^2 \qquad |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |x-y| \geqslant \eta$$

D'où
$$\{|f(\mathrm{X}_n) - f(\mathrm{X})| \geqslant \varepsilon\} \subset \{|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| \geqslant \eta\}$$

Par croissance de $\mathbb{P}$, il vient

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(|f(\mathrm{X}_n) - f(\mathrm{X})| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| \geqslant \eta\right)$$

Par comparaison, on conclut

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|f(\mathrm{X}_n) - f(\mathrm{X})| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 9 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, F et K des parties de E non vides et disjointes. On suppose K compact. On note

$$\mathrm{d}(\mathrm{K},\mathrm{F}) = \operatorname*{Inf}_{(x,y)\in\mathrm{K}\times\mathrm{F}} \|x-y\|$$

1. Si F compact, montrer $\mathrm{d}(\mathrm{K},\mathrm{F}) > 0$.
2. Que peut-on dire si F fermé ?

Corrigé : 1. L'application $\mathrm{E}^2 \to \mathrm{E}, (x,y) \mapsto x-y$ est linéaire avec $\|x-y\| \leqslant \|(x,y)\|_1$ pour $(x,y) \in \mathrm{E}^2$ d'où sa continuité. La norme étant continue, il s'ensuit par composition que l'application $\varphi : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \|x-y\|$ est continue. Comme le produit $\mathrm{K}\times\mathrm{F}$ est compact en tant que produit fini de compacts, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $(a,b) \in \mathrm{K}\times\mathrm{F}$ tel que $\operatorname*{Min}_{\mathrm{K}\times\mathrm{F}} \varphi = \varphi(a,b)$. Comme $a \neq b$ puisque F et K sont disjoints, on conclut

$$\boxed{\mathrm{d}(\mathrm{K},\mathrm{F}) > 0}$$

2. On a

$$\forall x \in \mathrm{K} \qquad \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) = \operatorname*{Inf}_{y\in\mathrm{F}} \|x-y\| \geqslant \mathrm{d}(\mathrm{K},\mathrm{F}) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname*{Inf}_{x\in\mathrm{K}} \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) \geqslant \mathrm{d}(\mathrm{K},\mathrm{F})$$

Puis $$\forall (x,y) \in \mathrm{K}\times\mathrm{F} \qquad \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) \leqslant \|x-y\| \quad \Longrightarrow \quad \operatorname*{Inf}_{x\in\mathrm{K}} \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) \leqslant \mathrm{d}(\mathrm{K},\mathrm{F})$$

Ainsi $$\operatorname*{Inf}_{x\in\mathrm{K}} \mathrm{d}(x,\mathrm{F}) = \mathrm{d}(\mathrm{F},\mathrm{K})$$

L'application $x \mapsto \mathrm{d}(x,\mathrm{F})$ est 1-lipschitzienne donc continue. Comme K est compact, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $x \in \mathrm{K}$ tel que $\mathrm{d}(x,\mathrm{F}) = \mathrm{d}(\mathrm{K},\mathrm{F})$ et comme $x \notin \mathrm{F} = \bar{\mathrm{F}}$, on a $\mathrm{d}(x,\mathrm{F}) > 0$. On conclut

$$\boxed{\mathrm{d}(\mathrm{F},\mathrm{K}) > 0}$$

Remarque : Le second cas couvre évidemment le premier. Mais, il faut préalablement établir l'égalité sur les bornes inférieures.

Variante : On peut procéder séquentiellement pour les deux questions. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on dispose d'une suite $(x_n, y_n)_n$ à valeurs dans $\mathrm{K}\times\mathrm{F}$ telle que

$$\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{d}(\mathrm{K},\mathrm{F})$$

Supposons F compact. On a $\mathrm{F}\times\mathrm{K}$ compact comme produit fini de compact. On dispose d'une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x,y) \in \mathrm{F}\times\mathrm{K}$ d'où

$$\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x-y\| = \mathrm{d}(\mathrm{K},\mathrm{F})$$

avec $\|x-y\| > 0$ puisque F et K sont disjoints. Supposons à présent F fermé. On dispose d'une extractice φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$. Si $\mathrm{d}(\mathrm{F},\mathrm{K}) = 0$, il vient

$$\|y_{\varphi(n)} - x\| \leqslant \|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - x\| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

d'où $$y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

ce qui implique $x \in \mathrm{F}$ puisque la suite $(y_{\varphi(n)})_n$ est à valeurs dans le fermé F. Ceci contredit le fait que les ensembles K et F soient disjoints.

Exercice 10 (*)

Soient E, F des evn et $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$ des parties connexes par arc.

1. Montrer que $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est connexe par arcs.
2. On suppose $\mathrm{E} = \mathrm{F}$. Montrer que $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ est connexe par arcs.

Corrigé : 1. Soient $(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, $(a', b') \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ et φ, ψ définies sur $[\,0\,;1\,]$ reliant continûment respectivement a à a' et b à b'. Par suite, l'application (φ, ψ) relie continûment (a, b) à (a', b') et est à valeurs dans $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ d'où

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{A} \times \mathrm{B} \text{ est connexe par arcs.}}$$

2. L'application $f : \mathrm{E}^2 \to \mathrm{E}, (x, y) \mapsto x + y$ est linéaire avec $\|f(x, y)\| \leqslant \|x\| + \|y\| = \|(x, y)\|_1$ pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ d'où sa continuité. L'ensemble produit E^2 est connexe par arcs et comme $\mathrm{A} + \mathrm{B} = f(\mathrm{E}^2)$ est l'image directe d'un connexe par arcs par une application continue, on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{A} + \mathrm{B} \text{ est connexe par arcs.}}$$

Exercice 11 (*)

Soit $\mathrm{A} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$. L'ensemble A est-il compact ? Connexe par arcs ?

Corrigé : On a clairement $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}_f(0, 1)$ boule unité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On pose $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x_k$ et $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - 1$. Ces applications sont polynomiales donc continues et on a

$$\mathrm{A} = \psi^{-1}(\{0\}) \cap \bigcap_{k=1}^{n} \varphi_k^{-1}([\,0\,; +\infty\,[)$$

Par conséquent, l'ensemble A est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ espace de dimension finie donc A est compact. C'est un ensemble convexe puisque pour x et y dans A, on a

$$\forall \lambda \in [\,0\,;1\,] \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i + \sum_{i=1}^{n} (1 - \lambda) y_i = 1$$

Ainsi $$\boxed{\text{L'ensemble A est compact et connexe par arcs.}}$$

Exercice 12 (**)

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ non vide non réduit à un point et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.

Corrigé : On pose $\mathrm{X} = \{(x, y) \in \mathrm{I}^2 \mid x < y\}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathrm{X} \qquad \varphi(x, y) = f(x) - f(y)$$

L'ensemble X est clairement convexe donc connexe par arcs. L'application φ est continue car composée de fonctions continues. Par conséquent, l'ensemble $\varphi(\mathrm{X})$ est une partie de $\mathbb{R}$ connexe par arcs avec $0 \notin \varphi(\mathrm{X})$. C'est donc un intervalle inclus dans $]\,0\,; +\infty\,[$ ou dans $]\,-\infty\,; 0\,[$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement monotone.}}$$

Variante : On peut résoudre l'exercice de manière élémentaire. Si f n'est pas strictement monotone, il existe $(x_1, y_1) \in \mathrm{I}^2$ avec $x_1 < y_1$ et $f(x_1) \geqslant f(y_1)$ et $(x_2, y_2) \in \mathrm{I}^2$ avec $x_2 < y_2$ et $f(x_2) \leqslant f(y_2)$. On pose

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \psi(t) = f((1-t)x_1 + tx_2) - f((1-t)y_1 + ty_2)$$

L'application ψ est continue avec $\psi(0) \geqslant 0$ et $\psi(1) \leqslant 0$ d'où l'existence de $t_0 \in [\,0\,;1\,]$ tel que $\psi(t_0) = 0$. Notant $(x_0, y_0) = (1-t_0)(x_1, y_1) + t_0(x_2, y_2)$, on a $f(x_0) = f(y_0)$ avec $x_0 < y_0$ ce qui contredit l'injectivité de f.

Exercice 13 (*)

L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-il connexe par arcs ?

Corrigé : Notons $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$. On pose $\varphi(t) = t\mathrm{M}$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$. On a φ continue, à valeurs dans $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ avec $\varphi(1) = \mathrm{M}$ et $\varphi(0) = 0$. Ceci prouve que $[\,0\,;\mathrm{M}\,]$ est inclus dans $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices diagonalisables est étoilé donc connexe par arcs.}}$$

Exercice 14 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de E est un fermé non compact d'intérieur vide connexe par arcs.

Corrigé : L'indice de nilpotence est majoré par n. Notant $\varphi : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^n$ continue par continuité du produit matriciel, on a $\mathcal{N} = \varphi^{-1}(\{0\})$. Puis, la suite $(k\mathrm{E}_{1,n})_k$ est à valeurs dans $\mathcal{N}$ et non bornée. Enfin, pour $\mathrm{A} \in \mathcal{N}$, on a par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ que $\mathrm{B}(\mathrm{A}, \varepsilon) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \varnothing$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il en résulte qu'aucune boule ouverte n'est incluse dans $\mathcal{N}$ puisque les matrices nilpotentes sont non inversibles. Enfin, l'ensemble $\mathcal{N}$ est clairement étoilé en 0_{E}. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{N} \text{ est un fermé non compact d'intérieur vide connexe par arcs.}}$$

Exercice 15 (*)

Le cône $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = z^2$ est-il connexe par arcs ?

Corrigé : Soit $\mathrm{M}(x, y, z) \in \mathcal{C}$. On pose $\varphi(t) = t(x, y, z)$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$. On a $\varphi(1) = \mathrm{M}$, $\varphi(0) = \mathrm{O}$ et φ à valeurs dans $\mathcal{C}$ par homogénéité de l'équation ce qui prouve que $\mathcal{C}$ est étoilé et par conséquent

$$\boxed{\text{Le cône } \mathcal{C} \text{ est étoilé donc connexe par arcs.}}$$

Exercice 16 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension infinie ou finie $n \geqslant 2$. Pour $\mathrm{R} \geqslant 0$, on pose

$$\Gamma_{\mathrm{R}} = \{x \in \mathrm{E} \ : \ \|x\| > \mathrm{R}\}$$

Montrer que Γ_{R} est connexe par arcs.

Corrigé : Soit $(x_1, x_2) \in \Gamma_{\mathrm{R}}^2$ avec (x_1, x_2) libre. On pose

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \varphi(t) = \frac{\|x_1\|(1-t) + \|x_2\| t}{\|(1-t)x_1 + tx_2\|}\,[(1-t)x_1 + tx_2]$$

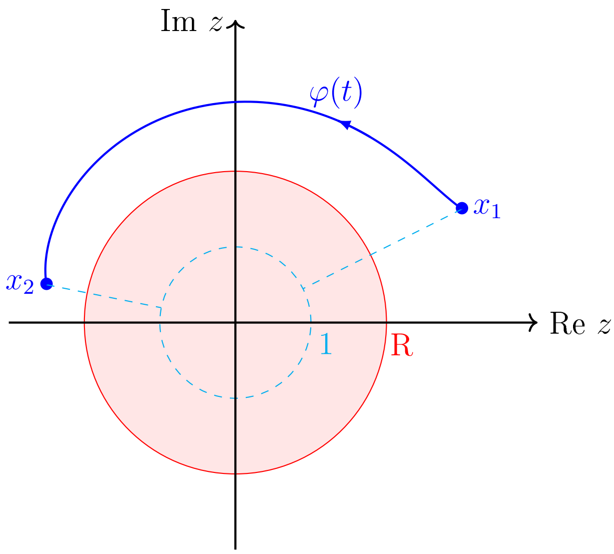

FIGURE 1 – Chemin reliant x_1 à x_2 dans Γ_{R} avec $\mathrm{E} = \mathbb{C}$

L'application φ est bien définie car le dénominateur ne s'annule pas par liberté de (x_1, x_2) et elle est continue sur $[\,0\,;1\,]$ comme composée de telles fonctions. On a $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(1) = x_2$ et

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad \|\varphi(t)\| = \underbrace{\|x_1\|}_{>\mathrm{R}}(1-t) + \underbrace{\|x_2\|}_{>\mathrm{R}}\, t > \mathrm{R}$$

ce qui prouve que φ est à valeurs dans Γ_{R}. Si (x_1, x_2) est liée, on choisit un vecteur $y \in \Gamma_{\mathrm{R}}$ tel que (x_1, y) soit libre (possible puisque l'espace E est de dimension $\geqslant 2$) et on relie par le procédé précédent x_1 à y puis y à x_2 continûment dans Γ_{R}. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \Gamma_{\mathrm{R}} \text{ est connexe par arcs.}}$$