ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°32

Exercice 1 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ son graphe.

1. Montrer que si f est continue, alors Γ_f est fermé.
2. Montrer que si f est bornée et Γ_f fermé, alors f est continue.
3. Le résultat précédent a-t-il lieu sans l'hypothèse f bornée ?

Corrigé : 1. Soit $(x_n, f(x_n))_n$ une suite à valeurs dans Γ_f telle que $(x_n, f(x_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y)$. En particulier, on a $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et par continuité de f

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

d'où $y = f(x)$ par unicité de la limite ce qui prouve $(x, y) \in \Gamma_f$. Par caractérisation séquentielle, on conclut

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est continue, alors } \Gamma_f \text{ est fermé.}}$$

Variante : On peut considérer $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y - f(x)$ et observer $\Gamma_f = g^{-1}(\{0\})$.

2. Soit $(x_n)_n$ suite réelle telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ avec x réel. Soit φ une extractrice telle que $\left(f(x_{\varphi(n)})\right)_n$ converge (il en existe d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass puisque f est bornée). Il s'ensuit que $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}))_n$ est une suite convergente à valeurs dans Γ_f. Par fermeture du graphe, on en déduit

$$(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, f(x))$$

Ainsi, la suite $\left(f(x_n)\right)_n$ admet $f(x)$ comme unique valeur d'adhérence et comme c'est une suite bornée dans un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie (de dimension 1 !), il s'ensuit

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

On conclut $\boxed{\text{Si } f \text{ est bornée et } \Gamma_f \text{ fermé, alors } f \text{ est continue.}}$

3. Le résultat est faux. On peut considérer $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ par exemple. Notant $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$, on a $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ car polynomiale et

$$\Gamma_f = \varphi^{-1}(\{1\}) \cup \{(0, 0)\}$$

Ainsi $\boxed{\text{On peut trouver } f \text{ non bornée, discontinue telle que } \Gamma_f \text{ soit fermé.}}$

Exercice 2 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $(\mathrm{A}^p)_p$ bornée. Pour p entier non nul, on pose $\mathrm{B}_p = \dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{A}^k$.

1. Montrer que la suite $(\mathrm{B}_p)_{p\geqslant 1}$ admet une valeur d'adhérence B.
2. Montrer que B vérifie $\mathrm{B}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = 0$.

3. En déduire B est une matrice de projection sur $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$.
4. Conclure sur le comportement asymptotique de $(\mathrm{B}_p)_{p\geqslant 1}$.

Corrigé : 1. La suite $(\mathrm{B}_p)_{p\geqslant 1}$ est bornée car $(\mathrm{A}^p)_p$ l'est. Ainsi, il existe une extractrice φ telle que

$$\boxed{\mathrm{B}_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{B}}$$

2. Par téléscopage, il vient $$\mathrm{B}_p(\mathrm{I}_n-\mathrm{A}) = \frac{1}{p}(\mathrm{I}_n-\mathrm{A}^p)$$

d'où $$\|\mathrm{B}(\mathrm{I}_n-\mathrm{A})\| \leqslant \frac{1}{p}\left(\|\mathrm{I}_n\|+\|\mathrm{A}^p\|\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $$\mathrm{B}_p(\mathrm{I}_n-\mathrm{A}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

et par continuité du produit matriciel

$$\mathrm{B}_{\varphi(p)}(\mathrm{I}_n-\mathrm{A}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{B}(\mathrm{I}_n-\mathrm{A})$$

Par unicité de la limite, on conclut $$\boxed{\mathrm{B}(\mathrm{I}_n-\mathrm{A})=0}$$

3. On vérifie sans difficulté

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{B}-\mathrm{I}_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{B}$$

Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \cap \mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$. On a $\mathrm{AX}=\mathrm{X}$ d'où $\mathrm{B}_{\varphi(p)}\mathrm{X}=\mathrm{X}$ et faisant tendre $p\to+\infty$, il vient $\mathrm{BX}=\mathrm{X}$ par continuité du produit matriciel. On a également $\mathrm{BX}=0$ d'où $\mathrm{X}=0$ et avec le théorème du rang, on obtient

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$$

Les sev $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{B}-\mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{B}$ étant clairement en somme directe, il vient pour raison de dimension

$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{B} \qquad \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{B}-\mathrm{I}_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\,\mathrm{B} \oplus \mathrm{Ker}\,(\mathrm{B}-\mathrm{I}_n)$$

On conclut

$$\boxed{\text{La matrice B est matrice de projection sur } \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n) \text{ parallèlement à } \mathrm{Im}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n).}$$

4. La suite $(\mathrm{B}_p)_{p\geqslant 1}$ est bornée dans une espace de dimension finie avec pour unique valeur d'adhérence la matrice B précédemment décrite. On conclut

$$\boxed{\mathrm{B}_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{B}}$$

Exercice 3 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie et U un ouvert de E. Montrer que U peut s'écrire comme une union croissante de compacts.

Corrigé : On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{K}_n = \mathrm{B}_f(0,n) \cap \left\{x \in \mathrm{E} \mid \mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$$

La suite $(\mathrm{K}_n)_{n\geqslant 1}$ est clairement croissante pour l'inclusion. Pour n entier non nul, on a

$$\mathrm{K}_n = \mathrm{B}_f(0,n) \cap \mathrm{d}(\cdot, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U})^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}\,;+\infty\right[\right)$$

L'application $\mathrm{d}(\cdot, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U})$ est continue car 1-lipschitzienne d'où la fermeture de K_n comme intersection d'une boule fermée avec l'image réciproque d'un fermé par une application continue. L'ensemble K_n est un fermé borné de E de dimension finie ce qui prouve sa compacité. L'ensemble $\mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}$ est fermé d'où

$$x \notin \mathrm{U} \iff \mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}) = 0$$

et par négation
$$x \in \mathrm{U} \iff \mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}) > 0$$

On en déduit $\mathrm{K}_n \subset \mathrm{U}$ puis $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{K}_n \subset \mathrm{U}$. Soit $x \in \mathrm{U}$. Comme $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe un seuil N_1 entier non nul tel que $\dfrac{1}{n} \leqslant \mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U})$ pour $n \leqslant \mathrm{N}_1$ et comme $n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, il existe un seuil N_2 tel que $\|x\| \leqslant n$ pour $n \geqslant \mathrm{N}_2$. Ainsi, il existe n entier non nul que l'on peut choisir $n = \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$ tel que $x \in \mathrm{K}_n$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{U} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{K}_n \text{ avec } (\mathrm{K}_n)_{n\geqslant 1} \text{ une suite croissante de compacts}}$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et F un sev de dimension finie de E. Montrer

$$\forall x \in \mathrm{E} \quad \exists y \in \mathrm{F} \quad | \quad \mathrm{d}(x, \mathrm{F}) = \|x - y\|$$

Corrigé : Soit $x \in \mathrm{E}$. Par caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe $(y_n)_n \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\|x - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{d}(x, \mathrm{F})$$

Par inégalité triangulaire
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|y_n\| \leqslant \|y_n - x\| + \|x\|$$

La suite $\left(\|y_n - x\|\right)_n$ est convergente donc bornée et par conséquent, la suite $(y_n)_n$ est bornée. Ainsi, il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que $(y_n)_n$ est à valeurs dans $\mathrm{K} = \mathrm{B}_f(0, \mathrm{M}) \cap \mathrm{F}$. Or, cet ensemble est un fermé borné de F espace de dimension finie et par conséquent K est un compact de F. Puis, il existe φ extractrice telle que $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in \mathrm{K} \subset \mathrm{F}$ et

$$\|y_{\varphi(n)} - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|y - x\| = \mathrm{d}(x, \mathrm{F})$$

On conclut
$$\boxed{\forall x \in \mathrm{E} \quad \exists y \in \mathrm{F} \quad | \quad \mathrm{d}(x, \mathrm{F}) = \|x - y\|}$$

Variante : Soit $x \in \mathrm{E}$ et $a \in \mathrm{F}$. On pose $\mathrm{K} = \mathrm{B}_f(x, \|a - x\|) \cap \mathrm{F}$. Cet ensemble est un fermé borné de F espace de dimension finie et par conséquent K est un compact de F. D'après le théorème des bornes atteintes appliqué à la fonction 1-lipschitzienne $\mathrm{d}(x, \cdot)$, il existe $y \in \mathrm{K}$ tel que

$$\mathrm{d}(x, y) = \operatorname*{Inf}_{z\in\mathrm{K}} \mathrm{d}(x, z) = \mathrm{d}(x, \mathrm{K})$$

Ainsi, on a

$$\forall z \in \mathrm{K} \qquad \mathrm{d}(x, y) \leqslant \mathrm{d}(x, z) \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathrm{F} \smallsetminus \mathrm{K} \qquad \mathrm{d}(x, y) \leqslant \mathrm{d}(x, a) < \mathrm{d}(x, z)$$

ce qui prouve
$$\mathrm{d}(x, y) = \operatorname*{Inf}_{z\in\mathrm{F}} \mathrm{d}(x, z) = \mathrm{d}(x, \mathrm{F})$$

Exercice 5 (***)

Soit E un evn, X une partie compacte non vide de E et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{X}^2 \quad \text{avec} \quad x \neq y \qquad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe α (considérer $\underset{x \in \mathrm{X}}{\mathrm{Inf}} \|x - f(x)\|$).
2. Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathrm{X}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que $(u_n)_n$ converge vers α.

Corrigé : 1. L'unicité est immédiate. L'application f est 1-lispchitzienne donc continue. Comme $x \mapsto \|x - f(x)\|$ est continue car composée de telles fonctions, elle atteint sa borne inférieure sur le compact X. Il existe donc $\alpha \in \mathrm{X}$ tel que $\underset{x \in \mathrm{X}}{\mathrm{Inf}} \|x - f(x)\| = \|\alpha - f(\alpha)\|$. Supposons $\alpha \neq f(\alpha)$. Il vient alors

$$\|f(f(\alpha)) - f(\alpha)\| < \|\alpha - f(\alpha)\|$$

ce qui est absurde par choix de α. On en déduit

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un unique point fixe } \alpha \in \mathrm{X}.}$$

2. La suite $(\|u_n - \alpha\|)_n$ est décroissante, positive donc convergente par limite monotone. Notons ℓ sa limite. Par compacité de X, il existe une extractrice φ tel que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} u \in \mathrm{X}$. On a aussi $f(u_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(u)$ par continuité de f. Ainsi

$$\|u_{\varphi(n)} - \alpha\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|u - \alpha\| = \ell \quad \text{et} \quad \|u_{\varphi(n)+1} - \alpha\| = \|f(u_{\varphi(n)}) - \alpha\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f(u) - \alpha\| = \ell$$

Si $u \neq \alpha$, on aurait $\|f(u) - \alpha\| < \|u - \alpha\|$ ce qui est absurde. On en déduit $f(u) = u$ d'où $u = \alpha$ et donc $\ell = 0$. Ainsi

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha}$$

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, K un compact convexe non vide et $f : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ une application 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe.

Corrigé : Soit $a \in \mathrm{K}$. On pose

$$\forall (x,n) \in \mathrm{K} \times \mathbb{N}^* \qquad f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) + \frac{a}{n}$$

Soit n entier non nul. Par convexité de K, l'application f_n est à valeurs dans K. Par ailleurs, on a

$$\forall (x,y) \in \mathrm{K}^2 \qquad \|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f(x) - f(y)\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\|$$

Ainsi, l'application f_n est k_n-lipschitzienne avec $k_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. L'application $g_n : x \mapsto \|f_n(x) - x\|$ est continue et atteint donc son minimum sur le compact K en un point x_n. Puis, on a

$$g_n(x_n) \leqslant g_n(f_n(x_n)) = \|f_n(f_n(x_n)) - f_n(x_n)\| \leqslant k_n g_n(x_n) \quad \text{avec} \quad k_n < 1$$

On en déduit $g_n(x_n) = 0$, autrement dit x_n est point fixe de f_n. La suite $(x_n)_n$ ainsi construite est à valeurs dans le compact K. Il existe donc une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathrm{K}$. Enfin, on a

$$f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)} \iff \left(1-\frac{1}{\varphi(n)}\right) f(x_{\varphi(n)}) + \frac{a}{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)}$$

Par continuité de f, on obtient $f(x) = x$ en passant à la limite. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ admet un point fixe.}}$$

Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Montrer que si la sphère unité $\mathrm{S}(0,1)$ est compacte, alors E est de dimension finie.

Corrigé : Supposons E de dimension infinie. Soit x_0 vecteur normé. On construit par récurrence une suite $(x_n)_n$ de vecteurs normés vérifiant $\|x_n - x_p\| \geqslant 1$ pour $n \neq p$. Supposons $(x_0, \ldots, x_n)$ construit et posons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x_0, \ldots, x_n)$. Comme E n'est pas de dimension finie, il existe $a \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$. D'après le résultat établi dans un autre exercice, on dispose de $b \in \mathrm{F}$ tel que $\mathrm{d}(a, \mathrm{F}) = \|a - b\|$. On pose alors

$$x_{n+1} = \frac{a-b}{\|a-b\|}$$

Par ailleurs, on a $\qquad \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}(\lambda x, \mathrm{F}) = |\lambda|\, \mathrm{d}(x, \mathrm{F})$

Si $\lambda = 0$ c'est trivial. Sinon, pour $\lambda \neq 0$, on a pour $y \in \mathrm{F}$

$$\|\lambda x - y\| = |\lambda|\, \|x - y/\lambda\| \geqslant |\lambda|\, \mathrm{d}(x, \mathrm{F})$$

d'où

$$\mathrm{d}(\lambda x, \mathrm{F}) \geqslant |\lambda|\, \mathrm{d}(x, \mathrm{F})$$

et

$$\mathrm{d}(x, \mathrm{F}) = \mathrm{d}(\lambda x/\lambda, \mathrm{F}) \geqslant \frac{1}{|\lambda|}\mathrm{d}(\lambda x, \mathrm{F})$$

d'où l'égalité. Par suite

$$\mathrm{d}(x_{n+1}, \mathrm{F}) = \frac{1}{\|a-b\|}\mathrm{d}(a-b, \mathrm{F}) = \frac{1}{\|a-b\|} \operatorname*{Inf}_{y \in \mathrm{F}} \|a - (b+y)\| = \frac{\mathrm{d}(a, \mathrm{F})}{\|a-b\|} = 1$$

puisque $y \mapsto b + y$ est une permutation de F. Ainsi, on a

$$\forall k \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!] \qquad \|x_{n+1} - x_k\| \geqslant \mathrm{d}(x_{n+1}, \mathrm{F}) = 1$$

et par construction, le vecteur x_{n+1} est unitaire. Supposons que la suite $(x_n)_n$ ainsi construite possède une valeur d'adhérence. Alors, il existe φ extractrice telle $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Puis, par inégalité triangulaire

$$1 \leqslant \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leqslant \|x_{\varphi(n+1)} - x\| + \|x - x_{\varphi(n)}\| = \mathrm{o}(1)$$

ce qui est absurde. La suite $(x_n)_n$ ainsi construite est à valeurs dans $\mathrm{S}(0,1)$ et n'admet pas de valeur d'adhérence. On conclut par contraposée

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{S}(0,1) \text{ est compacte, alors l'espace E est de dimension finie.}}$$

Remarque : Ce résultat s'intitule le *théorème de Riesz.* La preuve vaut aussi pour $\mathrm{B}_f(0,1)$. On en déduit que les compacts en dimension infinie sont d'intérieur vide. En effet, sinon on pourrait trouver une boule ouverte incluse dans un compact et cette boule ouverte contiendrait une boule fermée qui serait fermée dans un compact donc compacte ce qui est absurde dans un espace de dimension infinie.

Exercice 8 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn.

1. Soit $(x_n)_n$ suite à valeurs dans E pour laquelle il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad n \neq p \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$$
Montrer que $(x_n)_n$ n'admet aucune sous-suite convergente.
2. Soit K un compact de E. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p non nul et $x_1, \ldots, x_p$ dans E tels que
$$\mathrm{K} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$$

Corrigé : 1. Supposons qu'il existe φ extractrice telle que $x_\varphi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. On a
$$\varepsilon \leqslant \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leqslant \|x_{\varphi(n+1)} - \ell\| + \|\ell - x_{\varphi(n)}\| = \mathrm{o}(1)$$
Ainsi $\boxed{\text{La suite } (x_n)_n \text{ n'admet aucune sous-suite convergente.}}$

2. Si K est vide, le résultat est trivial. On suppose K non vide et on procède par l'absurde : supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout p entier non nul et tous $a_1, \ldots, a_p$ dans E, on a $\mathrm{K} \not\subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(a_i, \varepsilon)$. On va alors construire une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans K vérifiant les contraintes de la première question. On la construit par récurrence : on choisit $x_1 \in \mathrm{K}$ puis, pour n entier, on choisit $x_{n+1} \in \mathrm{K} \smallsetminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$. Ainsi, on a bien
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^{*2} \quad n \neq p \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$$
En effet, pour n et p entiers non nuls distincts avec par exemple $n > p$, si $\|x_n - x_p\| < \varepsilon$, on aurait alors $x_n \in \mathrm{B}(x_p, \varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ ce qui est faux par construction. Il s'agit donc d'une suite à valeurs dans K compact et sans sous-suite convergente, ce qui est absurde. On conclut
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists p \in \mathbb{N}^* \quad \exists (x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{E}^p \quad | \quad \mathrm{K} \subset \bigcup_{i=1}^{p} \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)}$$

Exercice 9 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$ evn de dimension finie, $g \in \mathscr{C}(\mathrm{E}, \mathbb{R}_+)$ avec $g(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$. On note $m = \operatorname*{Inf}_{x\in\mathrm{E}} g(x)$. Montrer que g admet un minimum global.

Corrigé : Il existe $\mathrm{R} \geqslant 0$ tel que pour $\|x\| > \mathrm{R}$
$$g(x) \geqslant g(0) \geqslant \operatorname*{Inf}_{x\in\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} g(x)$$
On a $m \leqslant \operatorname*{Inf}_{x\in\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} g(x)$. Supposons que l'inégalité soit stricte. Par définition d'une borne inférieure, il existe $a \in \mathrm{E}$ tel que
$$m \leqslant g(a) < \operatorname*{Inf}_{x\in\mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} g(x)$$

Si $a \in \mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$, la contradiction est manifeste avec la deuxième inégalité. Si $\|a\| > \mathrm{R}$, alors on a

$$g(a) \geqslant g(0) \geqslant \operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{B}_f(0,\mathrm{R})} g(x)$$

ce qui est encore contradictoire. La boule fermée $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{R})$ est un fermé borné d'un espace de dimension finie donc un compact. Comme g est continue, d'après le théorème des bornes atteintes, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ admet un minimum global.}}$$

Exercice 10 (***)

Soit E, F des $\mathbb{K}$-ev normés de dimension finie, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ continue. On dit que f est *propre* si pour tout K compact de F, l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{K})$ est un compact de E.

1. Montrer que si f est propre, alors pour tout C fermé, l'ensemble $f(\mathrm{C})$ est fermé.
2. Montrer $$f \text{ propre} \iff \|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$$

Corrigé : 1. Soit $(y_n)_n \in f(\mathrm{C})^{\mathbb{N}}$ avec $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} y$. Pour n entier, il existe $x_n \in \mathrm{C}$ tel que $y_n = f(x_n)$. La suite $(y_n)_n$ est convergente donc bornée et donc à valeurs dans une boule fermée B de F qui est compacte en tant que fermé borné d'un espace de dimension finie. Par conséquent, la suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans $f^{-1}(\mathrm{B})$ compact par propreté de f. Il existe alors une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} x \in f^{-1}(\mathrm{B})$ et par fermeture de C, il vient $x \in \mathrm{C}$ puis par continuité de f

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x) = y$$

Ainsi $$\boxed{\text{L'ensemble } f(\mathrm{C}) \text{ est fermé.}}$$

2. La deuxième assertion équivaut à

$$\forall \mathrm{M} \geqslant 0 \qquad \exists \mathrm{A} \geqslant 0 \quad | \quad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x\| > \mathrm{A} \implies \|f(x)\| > \mathrm{M}$$

c'est-à-dire $$\forall \mathrm{M} \geqslant 0 \qquad \exists \mathrm{A} \geqslant 0 \quad | \quad \forall x \in \mathrm{E} \qquad x \notin \mathrm{B}_f(0, \mathrm{A}) \implies f(x) \notin \mathrm{B}_f(0, \mathrm{M})$$

ou encore $$\forall \mathrm{M} \geqslant 0 \qquad \exists \mathrm{A} \geqslant 0 \quad | \quad f^{-1}(\mathrm{B}_f(0, \mathrm{M})) \subset \mathrm{B}_f(0, \mathrm{A})$$

Supposons f propre. Soit $\mathrm{M} \geqslant 0$. Puisque $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{M})$ est compact (fermé borné d'un espace de dimension finie), son image réciproque $f^{-1}(\mathrm{B}_f(0, \mathrm{M}))$ est compact donc contenue dans une boule fermé $\mathrm{B}_f(0, \mathrm{A})$ avec $\mathrm{A} \geqslant 0$. Réciproquement, soit K un compact. On a déjà $f^{-1}(\mathrm{K})$ fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue puis l'image réciproque d'une boule fermée est bornée donc l'image réciproque d'un compact est bornée. Ainsi, l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{K})$ est un fermé borné d'un espace de dimension finie et on conclut

$$\boxed{f \text{ propre} \iff \|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty}$$

Exercice 11 (***)

Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Corrigé : Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{T} = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ soit triangulaire supérieure. Pour $j \in [\![1\,; n]\!]$, on note $t_{j,j} = r_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}$. On pose

$$\forall u \in [\,0\,;1\,] \quad \varphi(u) = \mathrm{PS}(u)\mathrm{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{S}(u) = \big(s_{i,j}(u)\big)_{(i,j)} \quad \text{et} \quad s_{i,j}(u) = \begin{cases} ut_{i,j} & \text{si } i < j \\ r_j^u \mathrm{e}^{\mathrm{i}u\theta_j} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application φ ainsi définie est continue, à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ puisque $|\det \varphi(u)| = \prod_{i=1}^{n} r_i^u > 0$ et telle que $\varphi(1) = \mathrm{M}$ et $\varphi(0) = \mathrm{I}_n$. Ainsi, toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est relié continûment à I_n par un chemin à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Par transitivité et symétrie, toutes les matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont continûment reliées entre elles par un chemin dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ est connexe par arcs.}}$$

Exercice 12 (***)

Montrer que les composantes connexes d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sont ouvertes. En déduire que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Corrigé : Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et C une composante connexe de U. Pour $x \in \mathrm{U}$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{U}$ et $\mathrm{B}(x,r)$ étant connexe, il s'ensuit $\mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{C}$ d'où C ouvert. Si $n = 1$, soit $(\mathrm{C}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ la famille des composantes connexes. Pour $i \in \mathrm{I}$, on a C_i ouvert et connexe ce qui prouve qu'il s'agit d'un intervalle ouvert. Il existe $r_i \in \mathrm{C}_i \cap \mathbb{Q}$. Les composantes connexes formant une partition, pour $(i,j) \in \mathrm{I}^2$ avec $i \neq j$, on a $r_i \neq r_j$ d'où $i \mapsto r_i$ injective de $\mathrm{I} \to \mathbb{Q}$ ce qui prouve que I est au plus dénombrable.

Les composantes connexes de $\mathbb{R}^n$ sont ouvertes et tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion d'une famille plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.