


Programme de colles

 Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 10 01/12/25 - 05/12/25

Programme :

Familles sommables :

- Ensemble dénombrable, dénombrabilité d'une partie infinie de \mathbb{N} , ensemble fini ou dénombrable en bijection avec une partie de \mathbb{N} , ensemble au plus dénombrable, dénombrabilité de \mathbb{Z} , dénombrabilité d'un produit fini d'ensembles dénombrables, dénombrabilité de \mathbb{N}^2 et de \mathbb{Q} , union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, indénombrabilité de \mathbb{R} ;
- Somme d'une famille à valeurs dans $[0; +\infty]$, sommabilité, dénombrabilité du support d'une famille sommable, linéarité du symbole Σ , lien avec les séries, comparaison, théorème de sommation par paquets, invariance de la somme par permutation ;
- Famille de réels ou complexes, sommabilité, somme, espace vectoriel $\ell^1(I)$, linéarité du symbole Σ , croissance de Σ , inégalité triangulaire, théorème de sommation par paquets, invariance de la sommabilité et de la somme par permutation, lien avec les séries ;
- Sommes doubles de familles à valeurs dans $[0; +\infty]$, de familles de termes réels ou complexes, théorèmes de Fubini, produit de Cauchy, théorème du produit de Cauchy.

Suites de fonctions :

- Convergence simple d'une suite de fonctions ;
- Théorème de convergence dominée ;
- Convergence uniforme, la convergence uniforme implique la convergence simple, interprétation de la convergence uniforme avec la norme infinie ;
- Limite uniforme d'une suite de fonctions continues, cas d'une limite uniforme sur tout segment, théorème de la double limite ;
- Intégrale fonction de la borne supérieure pour une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment, intégrale sur un segment d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément ;
- Suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 convergeant simplement et dont la suite des fonctions dérivées convergent uniformément sur tout segment, extension au cas d'une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^k .

Questions de cours : (avec preuve sauf mention contraire)

1. Lien entre famille sommable indexée par \mathbb{N} et série (pour termes positifs et réels ou complexes) (sans preuve) ;
2. Théorème de sommation par paquets (pour termes positifs et réels ou complexes) (sans preuve) ;
3. Théorèmes de Fubini (pour termes positifs et réels ou complexes) (sans preuve) ;
4. Théorème du produit de Cauchy ;
5. Théorème de convergence dominée (sans preuve) ;
6. Mise en œuvre du théorème de convergence dominée sur l'exemple (naïf) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

7. La suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers u si et seulement si $u_n - u$ est bornée à partir d'un certain rang et $\|u_n - u\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
8. Limite uniforme sur un voisinage de a d'une suite de fonctions continues en a ;
9. Théorème de la double limite (sans preuve) ;
10. Limite de l'intégrale fonction de la borne supérieure d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment ;
11. Permutation limite/intégrale pour une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur $[a; b]$;
12. Contre-exemple $f_n(t) = n^2 t^n (1 - t)$ pour $t \in [0; 1]$ à la permutation limite/intégrale pour illustrer l'importance d'une domination ou d'une convergence uniforme. ;
13. Suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 convergeant simplement et dont la suite des fonctions dérivées convergent uniformément sur tout segment ;
14. Extension au cas d'une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^k (sans preuve).