TD EQUATIONS DE MAXWELL – ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE

Exercice 1**♥ : Sphère creuse chargée

On étudie une sphère creuse chargée avec une densité volumique de charges ρ(r). Son rayon intérieur est noté R_i son rayon extérieur est noté R_e. (Pour $r<R_i$ et pour $r>R_e$ la densité de charges est nulle).
La charge totale de cette sphère creuse est notée Q.
On donne l'expression du champ électrique dans la partie chargée :

$$\vec{E} = k(r - R_i)\overrightarrow{u_r} \qquad \text{pour } R_i \leq r \leq R_e$$

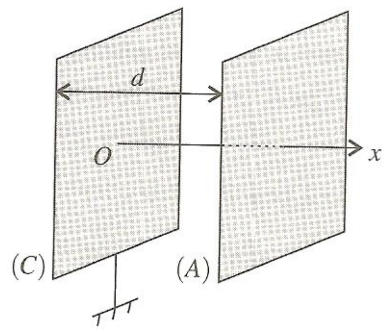
1) Calculer la constante k en fonction de R_i, R_e, Q et ε_0 *(On pourra appliquer le théorème de Gauss sur une surface bien choisie).*
2) En déduire l'expression de la densité volumique de charges ρ(r) en fonction de r, R_i, R_e et Q.
3) Exprimer le potentiel V(r) en tout point de l'espace en fonction de r, R_i, R_e, Q et ε_0.

On donne en coordonnées sphériques :

$$gr\vec{a}d(V) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{array} \right. \qquad div(\vec{a}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

Exercice 2*** : Diode à vide

Une diode à vide est constituée de deux plaques métalliques planes parallèles (C) et (A), de même surface S et distantes de d, entre lesquelles a été fait le vide. La cathode (C) est maintenue au potentiel 0. Elle émet des électrons de vitesse négligeable qui se dirigent vers l'anode (A) qui est portée au potentiel U>0. On admet pour simplifier que les trajectoires des électrons sont rectilignes perpendiculaires aux plaques. On se place en régime permanent. L'intensité passant de (A) à (C) est appelée I.
On note V(x) le potentiel électrostatique, ρ(x) la densité volumique de charges et v(x) la vitesse des électrons entre les plaques à la distance x de (C).



1) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de v(x) en fonction de V(x) et des caractéristiques d'un électron (masse m, charge –e).
2) Montrer que le produit ρ(x)v(x) est uniforme et exprimer cette constante en fonction de I et S.
3) Exprimer ρ(x) en fonction de V(x), $\alpha = \frac{I}{S\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}$ et ε_0.
4) Ecrire une équation différentielle vérifiée par V(x).
5) On admet que le champ électrique est nul en x=0. Intégrer une première fois l'équation précédente après l'avoir multipliée par $\frac{dV}{dx}$ pour obtenir $\frac{dV}{dx}$ en fonction de V(x).
6) En déduire I en fonction de U, pour U > 0. Que dire de I si U < 0 ?

Exercice 3**♥ : Bilan énergétique d'un long solénoïde en régime lentement variable.

On considère un solénoïde infini d'axe (Oz), de rayon a, comportant n spires par unité de longueur. Le courant dans les spires est $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$, lentement variable, de sorte que l'on peut appliquer l'ARQS.

1) A quelle condition sur a et τ peut-on appliquer l'ARQS ?
2) Quel est le champ magnétique dans le solénoïde ?
3) En déduire le champ électrique dans le solénoïde.
4) Calculer le vecteur de Poynting à l'intérieur du solénoïde. Calculer son flux à travers une longueur h de la surface latérale.
5) Calculer les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique. Les comparer. En déduire l'énergie électromagnétique d'une longueur h de solénoïde.
6) Bilan énergétique : vérifier l'équation de Poynting (locale ou intégrale).

On donne le rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{rot}(\vec{a}) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_r}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r a_\theta) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

Exercice 4**♥ : Cylindre dans un four à induction

Un cylindre de rayon a, de hauteur h et d'axe (Oz), constitué d'un métal ohmique de conductivité γ, est plongé dans un champ magnétique uniforme variable : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$ où B_0 et ω sont des constantes. On suppose que le champ magnétique n'est pas modifié par la présence du cylindre.

1) Justifier l'existence d'un champ électrique à l'intérieur du cylindre de la forme $\vec{E} = E(r,z,t)\overrightarrow{u_\theta}$, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).
2) En appliquant l'équation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale sur un cercle quelconque d'axe (Oz), déterminer E(r,z,t). En déduire la densité volumique de courant dans le cylindre.
3) Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.

Réponses :

Ex 1 : 1) $k = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_e^2(R_e-R_i)}$ *2)* $\rho(r) = \frac{Q}{4\pi R_e^2(R_e-R_i)}(3-2\frac{R_i}{r})$

3) *Si* $r \geq R_e$, $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$;

si $R_i \leq r \leq R_e$, $V(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_e^2(R_e-R_i)}\left[\frac{r^2}{2} - R_i r - \frac{3R_e^2}{2} + 2R_eR_i\right]$

Si $r < R_i$, $V(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_e^2(R_e-R_i)}\left[-\frac{R_i^2}{2} - \frac{3R_e^2}{2} + 2R_eR_i\right]$

Ex 2 : *1)* $v(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m}}$ 2) $\rho(x)v(x) = -I/S$ 3) $\rho(x) = -\frac{\alpha\varepsilon_0}{\sqrt{V(x)}}$ 4) $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{V(x)}}$

5) $\frac{dV}{dx} = 2\sqrt{\alpha}(V(x))^{1/4}$ 6) Si U > 0 , $I = \frac{4}{9}\frac{S\varepsilon_0}{d^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}U^{3/2}$; si U < 0 , I = 0.

Ex 3 : 1) $a \ll c\tau$ 2) $\vec{B} = \mu_0 n i(t)\overrightarrow{e_z}$ 3) $\vec{E} = -\frac{\mu_0 n}{2}\frac{di}{dt} r\overrightarrow{e_\theta}$ 4) $\vec{R} = -\frac{\mu_0 n^2}{2} i \frac{di}{dt} r\overrightarrow{e_r}$ $P = -\mu_0 n^2 \pi a^2 h i \frac{di}{dt}$

5) $u_e \ll u_m$, $U_{em} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 \pi a^2 h i^2$ 6) $-\frac{dU_{em}}{dt} = P$

Ex 4 : 2) $E = \frac{1}{2}\omega B_0 r \sin(\omega t)$ $\vec{j} = \frac{1}{2}\gamma\omega B_0 r\sin(\omega t)\overrightarrow{u_\theta}$ 3) $P_J = \frac{\pi}{16}\gamma\omega^2 B_0^2 h a^4$