Feuille d'exercices n°45

Exercice 1 (***)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f avec $f_n \geqslant f$.
2. Établir $$\forall t \geqslant 0 \qquad t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$$
   En déduire la convergence uniforme de (f_n) sur $[\,0\,;a\,]$ avec $a > 0$.
3. Montrer que la convergence uniforme a lieu en fait sur $\mathbb{R}_+$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. On a pour $x \geqslant 0$
$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-n\left(\frac{x}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-x+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-x}$$
Par concavité, on a $\ln(1+u) \leqslant u$ pour $u \geqslant 0$ d'où
$$\forall x \geqslant 0 \qquad f_n(x) = \mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} \geqslant \mathrm{e}^{-n\frac{x}{n}} = \mathrm{e}^{-x}$$
Ainsi
$$\boxed{\text{La suite } (f_n)_n \text{ converge simplement vers } f \text{ avec } f_n \geqslant f \text{ pour tout } n \text{ entier non nul avec } f(x) = \mathrm{e}^{-x} \text{ pour tout } x \geqslant 0.}$$
2. Soit h définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(t) = \ln(1+t)$ pour $t \geqslant 0$. On a $h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec
$$\forall t \geqslant 0 \qquad h'(t) = \frac{1}{1+t} \quad \text{et} \quad h''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$$
On en déduit $|h''(t)| \leqslant 1$ pour $t \geqslant 0$ et d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange
$$\forall t \geqslant 0 \qquad |\ln(1+t) - t| \leqslant \frac{t^2}{2}$$
d'où $$\forall t \geqslant 0 \qquad t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t)$$
En complétant avec l'inégalité de concavité, on conclut
$$\boxed{\forall t \geqslant 0 \qquad t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t}$$
On en déduit $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{e}^{-x} \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2n}} \leqslant \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\frac{a^2}{2n}}$$
d'où $$0 \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{\frac{a^2}{2n}} - 1\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{a^2}{2n}} - 1$$
Ainsi $$\boxed{\text{La suite } (f_n)_n \text{ converge vers } f \text{ uniformément sur } [\,0\,;a\,] \text{ avec } a > 0.}$$
3. Les fonctions f_n et f sont bornées. Pour $a > 0$, on a
$$\forall x \geqslant 0 \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_{\infty,[\,0\,;a\,]} + \|f_n - f\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[}$$

Comme les fonctions f_n décroissent, on trouve

$$\forall x \geqslant a \qquad |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a) = f_n(a) - f(a) + f(a)$$

Pour $\varepsilon > 0$, on peut choisir $a > 0$ tel que $f(a) \leqslant \varepsilon$ puis un seuil N tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait

$$f_n(a) - f(a) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \|f_n - f\|_{\infty,[\,0\,;a\,]} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi $$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \forall x \geqslant 0 \qquad |f_n(x) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon$$

Finalement $$\boxed{\text{La suite } (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f.}$$

Exercice 2 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec f non nulle et telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. On pose

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = f(nx) \quad \text{et} \quad g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$$

Étudier les modes de convergence de $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ puis $(f_n g_n)_n$.

Corrigé : Pour $x > 0$, on a $nx \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ d'où $f_n(x) = f(nx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $f_n(0) = 0$ pour n entier d'où la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers la fonction nulle. Comme $f \neq 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Avec $x_n = \dfrac{x_0}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$f_n(x_n) = f(x_0) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Soit $a > 0$. Pour $\varepsilon > 0$, comme $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on a $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \geqslant \mathrm{A}$ donc pour n assez grand, il vient

$$\forall u \geqslant na \qquad |f(u)| \leqslant \varepsilon$$

d'où $$\forall x \geqslant a \qquad |f_n(x)| = |f(nx)| \leqslant \varepsilon$$

autrement dit $$\|f_n\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite } (f_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge simplement vers la fonction nulle, pas} \\ \text{uniformément sur } \mathbb{R}_+ \text{ mais uniformément sur } [\,a\,;+\infty\,[\text{ avec } a > 0.\end{array}}$$

Pour $x \geqslant 0$, on a $g_n(x) = f\left(\dfrac{x}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0) = 0$ ce qui prouve la convergence simple de $(g_n)_{n\geqslant 1}$ vers la fonction nulle. Avec $y_n = nx_0$ pour n entier non nul, on a

$$g_n(y_n) = f(x_0) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Soit $a \geqslant 0$. Pour $\varepsilon > 0$, comme $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \in [\,0\,;\eta\,]$ avec $\eta \geqslant 0$ donc pour n assez grand, il vient

$$\forall u \leqslant \frac{a}{n} \qquad |f(u)| \leqslant \varepsilon$$

d'où $$\forall x \in [\,0\,;a\,] \qquad |g_n(x)| = \left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

autrement dit $$\|g_n\|_{\infty,[\,0\,;a\,]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite } (g_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge simplement vers la fonction nulle, pas}\\ \text{uniformément sur } \mathbb{R}_+ \text{ mais uniformément sur } [\,0\,;a\,] \text{ avec } a \geqslant 0.\end{array}}$$

D'après ce qui précède, la suite $(f_n g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose d'un seuil N entier tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \forall u \in \left[0\,;\frac{1}{n}\right] \qquad |f(u)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall v \geqslant n \qquad |f(v)| \leqslant \varepsilon$$

Puis, on a pour n entier non nul

$$\|f_n g_n\|_\infty \leqslant \|f_n g_n\|_{\infty,[\,0\,;1\,]} + \|f_n g_n\|_{\infty,[\,1\,;+\infty\,[}$$

d'où $$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \|f_n g_n\|_{\infty,[\,0\,;1\,]} \leqslant \varepsilon\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f_n g_n\|_{\infty,[\,1\,;+\infty\,[} \leqslant \varepsilon\|f\|_\infty$$

Par conséquent $$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \|f_n g_n\|_\infty \leqslant 2\varepsilon\|f\|_\infty$$

majorant qui peut être rendu arbitrairement petit et on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (f_n g_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge uniformément vers la fonction nulle.}}$$

Exercice 3 (***)

Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ une suite de polynômes réels.

1. On suppose que $(\mathrm{P}_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est polynomiale.
2. On suppose que $(\mathrm{P}_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur tout segment de $\mathbb{R}$. Le résultat précédent persiste-t-il ?

Corrigé : 1. Il existe un entier N tel que $\|\mathrm{P}_n - f\|_\infty \leqslant 1$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$. Alors, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on a

$$\|\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_\mathrm{N}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{P}_n - f\|_\infty + \|f - \mathrm{P}_\mathrm{N}\|_\infty \leqslant 2$$

Ainsi, le polynôme $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_\mathrm{N}$ est borné donc constant d'où $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_\mathrm{N} = \alpha_n$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$. Puis

$$\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_\mathrm{N} \xrightarrow[n\to\infty]{} f - \mathrm{P}_\mathrm{N} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_n - \mathrm{P}_\mathrm{N} = \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$$

Par unicité de la limite, il s'ensuit que $f = \alpha + \mathrm{P}_\mathrm{N}$ et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est polynomiale.}}$$

2. Une telle fonction est clairement continue sur $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit n entier non nul. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel

$$\|\mathrm{P}_n - f\|_{\infty,[\,-n\,;n\,]} \leqslant \frac{1}{n}$$

La suite de polynômes ainsi construite converge uniformément vers f sur tout segment puisque tout segment est inclus dans $[\,-n\,;n\,]$ à partir d'un certain rang. On conclut

$$\boxed{\text{Les fonctions solutions sont exactement les fonctions continues sur } \mathbb{R}.}$$

Exercice 4 (***)

Pour n entier non nul et $f \in \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{S}_n(f) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \ldots \left(\int_0^1 f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \ldots \right) \mathrm{d}x_n$$

1. Soit $r \geqslant 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{rx}$ pour $x \in [0;1]$. Montrer qu'il existe $a \in [0;1]$ tel que
$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$
2. Soit f définie par $f(x) = \mathrm{P}(\mathrm{e}^x)$ pour $x \in [0;1]$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer
$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$
3. En déduire que pour $f \in \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, on a
$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. On suppose $r > 0$. Par propriété fondamentale de l'exponentielle, on trouve

$$\mathrm{S}_n(f) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \ldots \left(\int_0^1 \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{\frac{r}{n}x_i}\, \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \ldots \right) \mathrm{d}x_n$$

On intègre successivement en x_1, x_2, ... Il s'ensuit

$$\mathrm{S}_n(f) = \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{r}{n}x}\, \mathrm{d}x \right)^n = \left(\frac{n}{r}\right)^n \left(\mathrm{e}^{\frac{r}{n}} - 1\right)^n = \exp\left[n\left(-\ln\left(\frac{r}{n}\right) + \ln \mathrm{e}^{\frac{r}{n}} + \ln(1-\mathrm{e}^{-\frac{r}{n}})\right)\right]$$

Avec le développement usuel $\qquad \mathrm{e}^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2)$

on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_n(f) &= \exp\left[n\left(-\ln\left(\frac{r}{n}\right) + \frac{r}{n} + \ln\left(\frac{r}{n} - \frac{r^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\right] \\ &= \exp\left[r + n\ln\left(1 - \frac{r}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\end{aligned}$$

Le développement usuel $\ln(1-u) = u + \mathrm{o}(u)$ donne $\mathrm{S}_n(f) = \exp\left[r - \dfrac{r}{2} + \mathrm{o}(1)\right]$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Remarque : Le résultat vaut encore pour $r = 0$.

2. Soit n entier non nul. Par linéarité de l'intégrale, l'application S_n est une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ et par combinaison linéaire, on obtient

$$\boxed{\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \qquad \mathrm{S}_n(\mathrm{P}\circ\exp) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{P}\circ\exp\left(\frac{1}{2}\right)}$$

3. Soit n entier non nul. Posons $g(t) = f(\ln t)$ pour $t \in [1;\mathrm{e}]$. Pour $\varepsilon > 0$, le théorème de Weierstrass garantit l'existence de $\mathrm{P}_\varepsilon \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall t \in [1;\mathrm{e}] \qquad |\mathrm{P}_\varepsilon(t) - g(t)| \leqslant \varepsilon$$

Par suite, notant $x = \ln t$, il vient

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad |\mathrm{P}_\varepsilon(\mathrm{e}^x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Par commodité, on confond polynôme et fonction polynomiale. Notant $\phi_\varepsilon = \mathrm{P}_\varepsilon \circ \exp$, il suffit alors d'écrire, par linéarité de S_n et par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{S}_n(f) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \left|\mathrm{S}_n(f-\phi_\varepsilon) + \mathrm{S}_n(\phi_\varepsilon) - \phi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) + \phi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \\ &\leqslant |\mathrm{S}_n(f-\phi_\varepsilon)| + \left|\mathrm{S}_n(\phi_\varepsilon) - \phi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \left|\phi_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\end{aligned}$$

En appliquant n fois l'inégalité triangulaire, on a $|\mathrm{S}_n(f-\phi_\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$. D'après le résultat de la question précédente, on peut trouver un seuil N tel que $\left|\mathrm{S}_n(\phi_\varepsilon) - \phi_\varepsilon(\frac{1}{2})\right| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, on a montré

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant \mathrm{N} \quad \Longrightarrow \quad \left|\mathrm{S}_n(f) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant 3\varepsilon$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Remarque : On a démontré un cas particulier de *la loi faible des grands nombres* pour des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $[\,0\,;1\,]$, à savoir

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{X}_i\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} f\left(\mathbb{E}(\mathrm{X})\right) \quad \text{avec} \quad \mathrm{X} \sim \mathscr{U}_{[\,0\,;1\,]} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\mathrm{X}) = \int_0^1 x \,\mathrm{d}x$$

Exercice 5 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ et $a \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_p \leqslant b$. Montrer

$$\exists (\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}} \qquad \begin{cases}\mathrm{P}_n \to f \text{ uniformément sur } [\,a\,;b\,] \\ \mathrm{P}_n(a_k) = f(a_k) \quad \forall k \in [\![\, 1\,;\, p\,]\!]\end{cases}$$

Corrigé : D'après le théorème de Weierstrass, il existe $(\mathrm{Q}_n)_n$ suite de polynômes tels que

$$\|\mathrm{Q}_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On note $(\mathrm{L}_k)_{k \in [\![1\,;\,p]\!]}$ les polynômes de Lagrange associés à $(a_1, \ldots, a_p)$ et on pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n = \mathrm{Q}_n + \sum_{k=1}^p \left[f(a_k) - \mathrm{Q}_n(a_k)\right] \mathrm{L}_k$$

Il s'agit bien d'une suite de polynômes et on a

$$\begin{aligned}\forall i \in [\![\, 1\,;\, p\,]\!] \qquad \mathrm{P}_n(a_i) &= \mathrm{Q}_n(a_i) + \sum_{k=1}^p \left[f(a_k) - \mathrm{Q}_n(a_k)\right] \underbrace{\mathrm{L}_k(a_i)}_{=\delta_{i,k}} \\ &= \mathrm{Q}_n(a_i) + f(a_i) - \mathrm{Q}_n(a_i) = f(a_i)\end{aligned}$$

Enfin $$\|\mathrm{P}_n - f\|_\infty \leqslant \|\mathrm{Q}_n - f\|_\infty + \sum_{k=1}^p \|f - \mathrm{Q}_n\|_\infty \times \|\mathrm{L}_k\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi $$\boxed{\exists (\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}} \qquad \begin{cases}\mathrm{P}_n \to f \text{ uniformément sur } [\,a\,;b\,] \\ \mathrm{P}_n(a_k) = f(a_k) \quad \forall k \in [\![\, 1\,;\, p\,]\!]\end{cases}}$$

Exercice 6 (****)

On note $\mathrm{N_A(P)} = \underset{t\in \mathrm{A}}{\mathrm{Sup}}\,|\mathrm{P}(t)|$ pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ avec A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\mathrm{N_A}$ soit une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   On considère A et B des parties infinies compactes de $\mathbb{R}$ distinctes.
   Pour n entier, on pose $f_n(x) = n\dfrac{\mathrm{d}(x,\mathrm{A})}{\mathrm{d}(x_0,\mathrm{A})}$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x_0 \in \mathrm{B} \smallsetminus \mathrm{A}$.

2. À l'aide de la fonction f_n avec n entier, montrer que $\mathrm{N_A}$ et $\mathrm{N_B}$ ne sont pas des normes équivalentes.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $\mathrm{N_A}$ et $\mathrm{N_B}$ soient équivalentes.
4. Généraliser le résultat précédent pour A et B des parties de $\mathbb{R}$ vérifiant la condition obtenue à la première question.

Corrigé : 1. Supposons A finie non vide. Alors le polynôme $\mathrm{P(X)} = \prod_{\lambda\in\mathrm{A}}(\mathrm{X}-\lambda)$ vérifie $\mathrm{N_A(P)} = 0$ bien que $\mathrm{P} \neq 0$ puisque $\deg \mathrm{P} > 0$. Supposons A non bornée. Alors, l'ensemble $\{|t|\,, t \in \mathrm{A}\}$ est non borné et on ne peut donc définir $\mathrm{N_A(X)}$. Ainsi, il est nécessaire d'avoir A infinie et bornée. Vérifions le caractère suffisant de ces propriétés. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. L'image d'une partie bornée par une application continue est bornée donc $\{|\mathrm{P}(t)|\,, t \in \mathrm{A}\}$ est une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$ qui admet donc une borne supérieure. Ainsi, la quantité $\mathrm{N_A(P)}$ est bien définie. Puis

$$\mathrm{N_A(P)} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \forall t \in \mathrm{A} \qquad \mathrm{P}(t) = 0$$

Ainsi P admet une infinité de racines ce qui implique qu'il s'agit du polynôme nul. Les autres propriétés de norme étant vérifiées sans difficultés, on conclut

$$\boxed{\mathrm{N_A} \text{ est une norme sur } \mathbb{R}[\mathrm{X}] \iff \mathrm{A} \text{ est une partie bornée et infinie de } \mathbb{R}}$$

2. Fixons n entier. Soit un segment $[\,\alpha\,;\beta\,]$ contenant $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$. D'après le théorème de Weierstrass appliqué à f_n continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[\,\alpha\,;\beta\,]$, on dispose $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\|\mathrm{P}_n - f_n\|_{\infty,[\,\alpha\,;\beta\,]} < 1$. D'où, par définition de f_n et par choix de $[\,\alpha\,;\beta\,]$

$$\|\mathrm{P}_n - f_n\|_{\infty,\mathrm{A}} = \mathrm{N_A}(\mathrm{P}_n) \leqslant \|\mathrm{P}_n - f_n\|_{\infty,[\,\alpha\,;\beta\,]} < 1 \quad \text{et} \quad \|\mathrm{P}_n - f_n\|_{\infty,\mathrm{B}} \leqslant \|\mathrm{P}_n - f_n\|_{\infty,[\,\alpha\,;\beta\,]} < 1$$

Par inégalité triangulaire inverse, on obtient

$$\mathrm{N_B}(\mathrm{P}_n) = \|\mathrm{P}_n\|_{\infty,\mathrm{B}} \geqslant \big|\|\mathrm{P}_n - f_n\|_{\infty,\mathrm{B}} - \|f_n\|_{\infty,\mathrm{B}}\big| \geqslant \|f_n\|_{\infty,\mathrm{B}} - 1 \geqslant n-1$$

Ainsi
$$\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{\mathrm{N_A}(\mathrm{P}_n)}{\mathrm{N_B}(\mathrm{P}_n)} < \frac{1}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\boxed{\text{S'il existe } x_0 \in \mathrm{B}\smallsetminus\mathrm{A}, \text{ les normes } \mathrm{N_A} \text{ et } \mathrm{N_B} \text{ ne sont pas équivalentes.}}$$

Variante : On peut aussi fixer $n = 1$ et agir sur la qualité d'approximation fournie par le théorème de Weierstrass. On a

$$\forall \varepsilon \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \exists \mathrm{P}_\varepsilon \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad | \quad \|\mathrm{P}_\varepsilon - f_1\|_{\infty,[\,\alpha\,;\beta\,]} < \varepsilon$$

En procédant comme ci dessus, on obtient

$$\mathrm{N_A}(\mathrm{P}_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \mathrm{N_B}(\mathrm{P}_\varepsilon) \geqslant 1-\varepsilon$$

d'où
$$\mathrm{N_A}(\mathrm{P}_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{N_B}(\mathrm{P}_\varepsilon) \not\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

ce qui contredit l'équivalence des normes.

3. On en déduit que si $\mathrm{N_A}$ et $\mathrm{N_B}$ sont équivalentes, alors $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et par symétrie des rôles $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. La réciproque est immédiate et on a donc montré

$$\boxed{\text{Pour A et B parties compactes infinies de } \mathbb{R} \qquad \mathrm{N_A} \sim \mathrm{N_B} \iff \mathrm{A} = \mathrm{B}}$$

4. Comme $\mathrm{A} \subset \bar{\mathrm{A}}$, il s'ensuit $\mathrm{N_A} \leqslant \mathrm{N_{\bar{A}}}$. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Pour $a \in \bar{\mathrm{A}}$, il existe $(a_n)_n$ à valeurs dans A telle que $a_n \to a$. Par continuité de $t \mapsto |\mathrm{P}(t)|$, il vient

$$|\mathrm{P}(a_n)| \xrightarrow[n \to \infty]{} |\mathrm{P}(a)| \quad \text{et} \quad |\mathrm{P}(a_n)| \leqslant \mathrm{N_A}(\mathrm{P})$$

d'où
$$\forall a \in \bar{\mathrm{A}} \qquad |\mathrm{P}(a)| \leqslant \mathrm{N_A}(\mathrm{P})$$

Par conséquent, on a $\mathrm{N_{\bar{A}}} \leqslant \mathrm{N_A}$ et donc $\mathrm{N_A} = \mathrm{N_{\bar{A}}}$ et de même avec B. Les parties $\bar{\mathrm{A}}$ et $\bar{\mathrm{B}}$ étant infinies, bornées et fermées donc compactes, il s'ensuit d'après le résultat qui précède

$$\boxed{\text{Pour A et B parties bornées infinies de } \mathbb{R} \qquad \mathrm{N_A} = \mathrm{N_{\bar{A}}} \sim \mathrm{N_{\bar{B}}} = \mathrm{N_B} \iff \bar{\mathrm{A}} = \bar{\mathrm{B}}}$$