ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°43

Exercice 1 (*)

On pose $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$

Étudier le mode convergence de la suite de fonctions $(u_n)_n$.

Exercice 2 (*)

On pose $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \qquad u_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx}$

Étudier le mode convergence de la suite de fonctions $(u_n)_n$.

Exercice 3 (*)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies de $[\,a\,;b\,]$ sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$. Soit $(x_n)_n \in [\,a\,;b\,]^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Montrer

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

Exercice 4 (*)

Soit $a \geqslant 0$. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad u_n(x) = n^a x^n (1-x)$$

Étudier le mode de convergence de la suite de fonctions $(u_n)_n$ en fonction de a.

Exercice 5 (**)

On pose $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right] \qquad u_n(x) = n\sin(x)\cos(x)^n$

Étudier le mode convergence de la suite de fonctions $(u_n)_n$.

Exercice 6 (**)

On pose $\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \qquad u_n(x) = \dfrac{nx^2\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$

Étudier le mode convergence de la suite de fonctions $(u_n)_n$.

Exercice 7 (**)

On pose $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = nx^n\sin(\pi x)$

Étudier le mode de convergence de $(f_n)_n$.

Exercice 8 (**)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right)$$

Étudier le mode de convergence de $(f_n)_n$.

Exercice 9 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dérivée seconde bornée. Étudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad u_n(t) = n\left[f\left(t+\frac{1}{n}\right) - f(t)\right]$$

Exercice 10 (**)

Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad g_n(x) = \frac{f^2(x)}{\sqrt{f^2(x)+\dfrac{1}{n}}}$$

Étudier les modes de convergence de de la suite de fonctions $(g_n)_n$.

Exercice 11 (**)

Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues définies sur un intervalle I est elle-même uniformément continue.

Exercice 12 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(\mathrm{P}_n)_n$ de polynômes telles que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour toit n entier et convergeant uniformément sur $[\,a\,;b\,]$ vers f.

Exercice 13 (**)

Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ une suite de polynômes réels convergeant uniformément vers zéro sur $[\,-1\,;0\,]$ et telle que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ pour tout n entier. Montrer que la suite $(\deg \mathrm{P}_n)_n$ n'est pas majorée.