ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°44

Exercice 1 (**)

Soit une suite $(f_n)_n \in \mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f. Montrer que

$$\frac{f_n}{1+f_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CU}} \frac{f}{1+f^2}$$

Exercice 2 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t = 0$ pour tout n entier. Montrer que $f = 0$.

Exercice 3 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ et $(\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CS}} f$. Montrer

$$\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CU}} f$$

Exercice 4 (**)

On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$

Étudier le mode de convergence de la suite $(f_n)_n$.

Exercice 5 (***)

On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \sin(x)^n \cos(x)$

Étudier le mode de convergence de la suite $(f_n)_n$.

Exercice 6 (***)

On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[\,0\,;n\,]}(x)$

Étudier le mode de convergence de la suite $(f_n)_n$.

Exercice 7 (***)

Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions k-lipschitzienne sur $[\,0\,;1\,]$ avec $k > 0$. Montre que si $(u_n)_n$ converge simplement, alors elle converge uniformément sur $[\,0\,;1\,]$.

Exercice 8 (***)

Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $[\,0\,;1\,]$ par

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{P}_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_{n+1}(x) = \mathrm{P}_n(x) + \frac{1}{2}\,(x - \mathrm{P}_n^2(x))$$

1. Établir $\quad \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \sqrt{x} - \mathrm{P}_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$
2. En déduire que $(\mathrm{P}_n)_n$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[\,0\,;1\,]$.
3. Construire une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[\,-1\,;1\,]$.

Exercice 9 (***)

On définit la suite de fonctions $(u_n)_n$ sur $[\,0\,;1\,]$ par

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer $\quad \forall (x, n) \in [\,0\,;1\,] \times \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. En déduire la convergence simple de $(u_n)_n$.
3. Montrer que $(u_n)_n$ converge uniformément vers u non nulle solution de $u'(x) = u(x - x^2)$.

Exercice 10 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$.

1. Étudier le comportement asymptotique de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.
2. En déduire les comportements de de $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 11 (****)

Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([\,a\,;b\,], \mathbb{K})$. Déterminer

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\,|\sin(\lambda t)|\,\,\mathrm{d}t$$