ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°45

Exercice 1 (***)

On pose $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f avec $f_n \geqslant f$.
2. Établir $\forall t \geqslant 0 \qquad t - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$

   En déduire la convergence uniforme de (f_n) sur $[\,0\,;a\,]$ avec $a > 0$.
3. Montrer que la convergence uniforme a lieu en fait sur $\mathbb{R}_+$.

Indications : 2. Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange et une inégalité de convexité.
3. Considérer $|f_n - f|$ sur $[\,0\,;a\,]$ et $[\,a\,;+\infty\,[$ pour $a > 0$. Utiliser la décroissance de f_n et f pour une majoration sur $[\,a\,;+\infty\,[$.

Exercice 2 (***)

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec f non nulle et telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = f(nx) \quad \text{et} \quad g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$$

Étudier les modes de convergence de $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ puis $(f_n g_n)_n$.

Indications : Pour la convergence uniforme de $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ sur $\mathbb{R}_+$, considérer des suites de points adaptées. Pour le produit $f_n g_n$, considérer la norme infinie respectivement sur $[\,0\,;1\,]$ et $[\,1\,;+\infty\,[$.

Exercice 3 (***)

Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ une suite de polynômes réels.

1. On suppose que $(\mathrm{P}_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est polynomiale.
2. On suppose que $(\mathrm{P}_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur tout segment de $\mathbb{R}$. Le résultat précédent persiste-t-il ?

Indications : 1. Justifier qu'il existe un seuil N tel que $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_\mathrm{N}$ est borné pour $n \geqslant \mathrm{N}$.
2. Pour $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considérer une certaine suite de polynômes sur le segment $[\,-n\,;n\,]$ pour n entier non nul.

Exercice 4 (***)

Pour n entier non nul et $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{S}_n(f) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \ldots \left(\int_0^1 f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \ldots \right) \mathrm{d}x_n$$

1. Soit $r \geqslant 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{rx}$ pour $x \in [\,0\,;1\,]$. Montrer qu'il existe $a \in [\,0\,;1\,]$ tel que
$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$
2. Soit f définie par $f(x) = \mathrm{P}(\mathrm{e}^x)$ pour $x \in [\,0\,;1\,]$ avec $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer
$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$
3. En déduire que pour $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$, on a
$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$$

Indications : 1. Réaliser n intégrations successives.
3. Appliquer le théorème de Weierstrass à la fonction $f \circ \ln$ sur $[\,1\,;\mathrm{e}\,]$.

Exercice 5 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et $a \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_p \leqslant b$. Montrer

$$\exists (\mathrm{P}_n)_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}} \qquad \begin{cases} \mathrm{P}_n \to f \text{ uniformément sur } [\,a\,;b\,] \\ \mathrm{P}_n(a_k) = f(a_k) \quad \forall k \in [\![\,1\,;\,p\,]\!] \end{cases}$$

Indications : Construire une suite de polynômes $(\mathrm{P}_n)_n$ à l'aide d'une suite $(\mathrm{Q}_n)_n$ de polynômes d'approximation pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et des polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux a_k.

Exercice 6 (****)

On note $\mathrm{N_A}(\mathrm{P}) = \underset{t\in\mathrm{A}}{\mathrm{Sup}}\, |\mathrm{P}(t)|$ pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ avec A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\mathrm{N_A}$ soit une norme sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

   On considère A et B des parties infinies compactes de $\mathbb{R}$ distinctes.
   Pour n entier, on pose $f_n(x) = n\dfrac{\mathrm{d}(x,\mathrm{A})}{\mathrm{d}(x_0,\mathrm{A})}$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x_0 \in \mathrm{B} \smallsetminus \mathrm{A}$.
2. À l'aide de la fonction f_n avec n entier, montrer que $\mathrm{N_A}$ et $\mathrm{N_B}$ ne sont pas des normes équivalentes.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que $\mathrm{N_A}$ et $\mathrm{N_B}$ soient équivalentes.
4. Généraliser le résultat précédent pour A et B des parties de $\mathbb{R}$ vérifiant la condition obtenue à la première question.

Indications : 1. Considérer A fini ou non borné et établir une contradiction.
2. Pour n entier, utiliser le théorème de Weierstrass pour approcher la fonction f_n et en déduire que $\mathrm{N_B}/\mathrm{N_A}$ n'est pas majoré.
4. Comparer $\mathrm{N_A}$ et $\mathrm{N_{\bar{A}}}$, $\mathrm{N_B}$ et $\mathrm{N_{\bar{B}}}$.