Devoir en temps libre n°09

Problème I

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = f\left(x + \frac{x(1-x)}{n}\right)$$

Étudier le mode de convergence de $(f_n)_n$.

Problème II

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{B}_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k}$$

On rappelle $$\|\mathrm{B}_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On note $$\forall (u,v) \in [\,0\,;1\,]^2,\ u \neq v \qquad \tau(u,v) = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$$

1. Établir $$\mathrm{B}_n(f)' = \sum_{k=0}^{n-1} \tau\left(\frac{k+1}{n}, \frac{k}{n}\right)\binom{n-1}{k}\mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-1-k}$$
2. Établir
$$\mathrm{B}_n(f)'' = (n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\left(\tau\left(\frac{k+2}{n}, \frac{k+1}{n}\right) - \tau\left(\frac{k+1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right)\binom{n-2}{k}\mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-2-k}$$
3. Montrer que f est convexe si et seulement si f est limite uniforme de fonctions polynomiales convexes.

Problème III

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $\mathbb{Q} \cap [\,0\,;1\,] = \{r_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ puis on pose

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{avec} \quad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = \frac{f(x-r_n)}{2^n}$$

1. Étudier la dérivabilité et le caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction f.
2. Justifier la description proposée de $\mathbb{Q} \cap [\,0\,;1\,]$.
3. Montrer que la fonction F est bien définie et continue sur $[\,0\,;1\,]$.

4. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[\,0\,;1\,]$ et préciser $\mathrm{F}'(x)$ sous forme de somme pour $x \in [\,0\,;1\,]$. Pour $x_0 \in [\,0\,;1\,]$, on pourra poser
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ f_n'(x_0) & \text{sinon} \end{cases}$$
et exprimer le taux d'accroissement de F en x_0 à l'aide des fonctions g_n.
5. Étudier la continuité de F' sur $[\,0\,;1\,]$. On pourra étudier F' en $x_0 \in (\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}) \cap [\,0\,;1\,]$ puis considérer $\mathrm{F}' - f'_{n_0}$ pour n_0 entier.