Commentaires - Devoir en temps libre n°07

Remarques générales : La séparation de l'intégrale demeure un point de rédaction globalement défaillant. Par ailleurs, nombreux sont ceux qui annoncent $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}(x)$ polynomiale donc continue, avec $x \in \mathbb{K}$. Cette assertion est vraie mais elle signifie que l'application est polynomiale en les coefficients du polynôme, ce qui est tout sauf clair quand on lit les copies. Dans ce devoir, il était nettement plus pertinent et moins sujet à confusion d'annoncer $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(x)$ linéaire en dimension finie donc continue.

Problème I

Réussite mitigée sur ce problème. Peu de dessins recensés sur l'ensemble des copies ... Un certain nombre procède par l'absurde avec succès. Une approche directe est possible en considérant $\mathrm{d}(\mathrm{K}, \mathrm{E} \setminus \mathrm{U}) = \operatorname*{Inf}_{(x,y) \in \mathrm{K} \times \mathrm{E} \setminus \mathrm{U}} \|x - y\|$; il est indispensable de prouver que cette borne inférieure est strictement positive ce qui requiert d'utiliser la compacité de K.

Problème II

1. La séparation est incomplète dans un trop grand nombre de copies : il faut s'appliquer !

2. Certains veulent expliciter les polynômes L_i' : c'est lourd et inutile. Beaucoup d'erreurs ou d'arguments incomplets pour ceux qui ont fait ce choix maladroit.

3. Plutôt bien traitée. Il faut relire le cours **Espaces vectoriels normés** pour connaître la définition d'une norme infinie relative à une base.

4. Très peu interprètent A comme la boule unité fermée pour $\|\cdot\|_{\infty,\mathscr{B}}$ ce qui rend pourtant la question triviale. Ne pas omettre la dimension finie de l'espace.

5. Plusieurs invoquent la continuité de la norme comme argument : cela donne une impression confuse parce que toute la question est de savoir avec quelle norme on travaille sur l'espace E. L'argument des normes équivalentes est beaucoup plus clair.

Problème III

1. Plutôt bien traitée ; ne pas oublier la positivité en tout point.

2. Là encore, la séparation est incomplète dans un trop grand nombre de copies : ce n'est pas normal, vous devez réagir ! Par ailleurs, pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{\mathrm{N}}[\mathrm{X}]$, c'est $x \mapsto \mathrm{P}(x)$ qui est polynomiale et non $x \mapsto |\mathrm{P}(x)|$.

3. Il faut d'une manière ou une autre justifier la continuité de l'évaluation $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(x)$ avec $x \in [-1\,;1]$. On pouvait citer la linéarité en dimension finie qui implique la continuité ou aussi exploiter l'équivalence des normes. Beaucoup sont passés à côté de la question en fournissant

des arguments creux.

4. Question peu traitée : la bonne définition de la borne inférieure n'est quasiment jamais traitée, la caractérisation séquentielle de la borne inférieure est parfois bien formulée mais elle ne suffit pas, il faut recourir à un argument de compacité en se plaçant dans une partie fermée bornée et ne pas omettre la mention de la dimension finie.

5. Assez bien traitée. Pour la fermeture de $\mathrm{B_N}$, il faut considérer $\mathrm{L} : \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}$ et non $\mathrm{L} : \mathrm{A_N} \to \mathbb{R}$ car l'ensemble $\mathrm{A_N}$ n'est pas un espace vectoriel et l'interprétation en terme d'image réciproque requiert une structure d'espace vectoriel au départ et à l'arrivée.

6. Peu abordée bien que la question ne soit pas si difficile.