

Commentaires - Devoir surveillé n°3

Les prestations sont un peu décevantes : jusqu'à la question 15 incluse, tout avait été abordé soit en cours, soit en exercice. Une minorité a réussi à traiter correctement ces 15 premières questions.

L'apprentissage du cours est défaillant : on constate de nombreuses confusions sur la diagonalisabilité, la notion de polynôme annulateur mais on rencontre surtout beaucoup trop de rédactions aberrantes avec par exemple des « vecteurs élevés à la puissance » ce qui n'a aucun sens. Tous ces points méritent un travail beaucoup plus approfondi. Il faut réagir et vous le pouvez !

I Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

1. Le bon outil est le polynôme caractéristique ici. Ceux qui traduisent $\lambda \in \text{Sp}(M)$ en $MX = \lambda X$ (en omettant $X \neq 0$ ce qui rend leur assertion creuse) ne s'en sortent pas.
2. ⚠ La condition suffisante de diagonalisation n'est pas nécessaire : pour s'en convaincre, on peut considérer la matrice nulle par exemple. Énormément de confusions sur cette question.
3. Assez bien traitée. Ceux qui s'engagent dans une récurrence doivent la rédiger.
4. Peu posent le système à résoudre et très peu parviennent à le résoudre. Ce point avait fait l'objet d'une correction d'exercice en classe entière.
5. Il faut procéder par double implication ici. Ceux qui veulent tout rédiger par équivalence perdent le sens indirect systématiquement.
6. Le sens indirect est la condition suffisante de diagonalisation ; certains parviennent à manquer cela ... Pour le sens direct, il fallait penser à lier le résultat portant sur C_Q^T avec C_Q .
7. La liberté de $(\text{id}, f, \dots, f^{n-1})$ est bien traitée dans l'ensemble ; en revanche, la suite l'est beaucoup moins : certains confondent $\dim \mathcal{L}(E)$ et $\dim E$ et peu semblent connaître le résultat $\deg \pi_f \leq \dim E$.
8. Très peu arrivent à justifier le choix d'un p maximal garantissant la condition de liberté. Le coefficient devant $f^p(x)$ est très souvent occulté.
9. Bien traitée par presque tous.
10. De nombreuses confusions alors que c'est directement un résultat du cours.
11. Très peu concluent : la plupart n'ont pas compris la démarche et en particulier le fait que le polynôme considéré à la question précédente dépend du choix de $x \neq 0_E$.

II Étude des endomorphismes cycliques

12. Le sens direct est immédiat en utilisant le fait que $\pi_f = X^r$ et le résultat de Q7. Le sens indirect est plus technique mais a été vu en cours : plusieurs ont très bien retrouvé la démarche.

13. Beaucoup de rédactions inefficaces pour dire la stabilité des F_k : il suffisait de voir que f et $(f - \lambda \text{id})^m$ sont dans l'algèbre commutative $\mathbb{K}[f]$. L'égalité avec somme directe est une conséquence de Cayley-Hamilton et du lemme des noyaux bien évidemment. Ceux qui n'identifient pas ce résultat doivent s'interroger sur leur méthode d'apprentissage du cours.

14. Évident par définition de φ_k pourtant, plusieurs ratent la question et écrivent des choses insensées.

15. C'est un résultat du cours : l'indice de nilpotence est inférieur à la dimension de l'espace !

16. Première question réellement difficile et bloquante. Réussie dans une seule copie.

17. Très peu de bonnes choses.

18. Personne n'a réussi cette question.

19. Réussie dans deux copies, en admettant le résultat de la question précédente.

III Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

20. Assez bien traitée.

21. OK.

22. Réussite inégale mais quelques très bonnes rédactions.

23. Dans la foulée de la question précédente

24. Très souvent abordée mais pratiquement jamais récompensée. Question excessivement difficile. Le cas d'une union de deux sev qui était abordable et permettait d'amorcer un raisonnement a été vu dans une seule copie seulement.

25. Aucune réponse ne s'approche de ce qui était attendu. Quasiment personne ne suit l'indication ! C'est assez stupéfiant.

26. Peu de bonnes choses alors que la question est très raisonnable. Une petite minorité pense à utiliser le fait que $d = \deg \pi_f$. Les autres se perdent dans des rédactions confuses et non démonstratives.

27. OK.

28. Quelques bonnes surprises.

29, . . . , 33. Presque plus aucun point accordé sauf dans trois copies.