ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°48

Exercice 1 (***)

On pose $$\mathrm{S}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$$

1. Étudier la définition, la continuité et dérivabilité de S.
2. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x\to 1^-$.

Corrigé : 1. On pose $$\forall (n,x)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}\qquad u_n(x)=\frac{x^n}{1-x^n}$$

Les fonctions u_n sont définies au plus sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Pour $|x|>1$, on a
$$\frac{x^n}{1-x^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x^n}{-x^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}-1$$
et pour $|x|<1$ $$\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}|x|^n$$
d'où la convergence absolue de la série. On en déduit
$$\boxed{\text{La fonction S est bien définie sur }]-1\,;1\,[.}$$
Soit $a\in[\,0\,;1\,[$. On a
$$\forall (n,x)\in\mathbb{N}^*\times[\,-a\,;a\,]\qquad \left|\frac{x^n}{1-x^n}\right|\leqslant\frac{|x|^n}{1-|x|}\leqslant\frac{a^n}{1-a}$$
On en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ et par conséquent
$$\boxed{\mathrm{S}\in\mathscr{C}(]-1\,;1\,[\,,\mathbb{R})}$$
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Par dérivation, on trouve
$$\forall (n,x)\in\mathbb{N}^*\times\,]-1\,;1\,[\qquad u_n'(x)=\frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$
Soit $a\in[\,0\,;1\,[$. Il vient
$$\forall (n,x)\in\mathbb{N}^*\times[\,-a\,;a\,]\qquad |u_n'(x)|\leqslant\frac{na^{n-1}}{(1-a)^2}\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ converge simplement, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $]-1\,;1\,[$ et par théorème, on conclut
$$\boxed{\mathrm{S}\in\mathscr{C}^1(]-1\,;1\,[\,,\mathbb{R})}$$
2. Soit $x\in\,]\,0\,;1\,[$. La fonction $t\mapsto\dfrac{x^t}{1-x^t}$ est continue par morceaux sur $[\,1\,;+\infty\,[$, décroissante, positive. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$ est de même nature que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x^n}{1-x^n}$ donc convergente. Par comparaison série/intégrale, il vient

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{S}(x) = \frac{x}{1-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \frac{x}{1-x} + \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$$

avec
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(1-x^t)}{\ln(x)}\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

d'où
$$\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \frac{x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Enfin, on constate
$$\frac{x}{x-1} \underset{x\to 1^-}{=} \mathrm{o}\left(\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}\right)$$

D'où
$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}}$$

Variantes : (a) Si on reconnaît pas de dérivée dans l'expression $\dfrac{x^t}{1-x^t}$ avec $t \geqslant 1$, on peut utiliser le changement de variables $u = x^t$. Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{1}{\ln(x)}\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1-u}$ sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales avec

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(x)}\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1-u} = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

(b) Pour la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t$ avec $x \in \left]0\,;1\right[$, on peut remarquer

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} x^t \sum_{n=0}^{+\infty} x^{nt}\,\mathrm{d}t$$

Or, la série $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} x^{(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \sum \frac{x^{n+1}}{(n+1)\ln(x)}$ converge et par intégration terme à terme, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1-x^t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\ln(x)} = -\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Exercice 2 (****)

On pose
$$\forall n \geqslant 2 \qquad \forall x \geqslant 0 \qquad f_n(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montre que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
4. La fonction somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} f_n$ est-elle dérivable à droite en 0^+ ?

Corrigé : 1. Soit $n \geqslant 2$ entier. On a $f_n(0) = 0$ puis $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ pour $x > 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} f_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+.}$$

2. Soit $n \geqslant 2$ entier. La fonction f_n est dérivable avec

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f_n'(x) = \frac{(1-nx)\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$$

Ainsi
$$\forall n \geqslant 2 \qquad \|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n\ln(n)}$$

La série de Bertrand $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ est divergente. En effet, par comparaison série/intégrale, elle est de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$ et

$$\forall x \geqslant 2 \qquad \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_2^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Par conséquent $$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} f_n \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}_+.}$$

3. Soit $n \geqslant 2$ entier et $x \geqslant 0$. Par décroissance de $u \mapsto \dfrac{1}{\ln u}$, il vient

$$\mathrm{R}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-kx}}{\ln(k)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx}$$

Puis
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx} = \frac{x\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{e}^{-nx} = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{e}^{-nx}$$

Par convexité, on a $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant x$ d'où

$$\forall x \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \mathrm{R}_n(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)}$$

et par conséquent
$$\|\mathrm{R}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On conclut $$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2} f_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+.}$$

4. On note S la fonction somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$. Pour $n \geqslant 2$ entier et $x > 0$, on a

$$\frac{\mathrm{S}(x) - \mathrm{S}(0)}{x - 0} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{\ln(k)} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{\ln(k)}$$

Supposons S dérivable en 0. Faisant tendre $x \to 0^+$, on aurait alors

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{S}'(0) \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)}$$

Ceci est absurde puisque $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{\ln(k)}$ étant divergente à termes positifs.

On conclut $$\boxed{\text{La fonction somme S n'est pas dérivable en 0.}}$$

Exercice 3 (***)

On pose $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} [\operatorname{Arctan}(x+n) - \operatorname{Arctan}(n)]$

1. Montrer que S est $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. Déterminer une relation entre $\mathrm{S}(x)$ et $\mathrm{S}(x+1)$.
3. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [0\,;+\infty[\qquad u_n(x) = \operatorname{Arctan}(x+n) - \operatorname{Arctan}(n)$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour $(n,x) \in \mathbb{N} \times [0\,;+\infty[$

$$|u_n(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t \in]n\,;n+x[} \frac{1}{1+t^2} |x+n-n| = \frac{x}{1+n^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série définissant S est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ convergeant simplement sur $\mathbb{R}_+$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \qquad u_n'(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \|u_n'\|_\infty = \frac{1}{1+n^2}$$

D'après le critère de Riemann, on a convergence normale de $\sum u_n'$ et par conséquent

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})}$$

2. Par linéarité du symbole somme, on a

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\operatorname{Arctan}(x+n+1) - \operatorname{Arctan}(x+n)]$$

Par téléscopage, on obtient

D'où $\qquad \boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x}$

3. Par téléscopage, avec la propriété fondamentale d'Arctan, on trouve

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{S}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} [\mathrm{S}(k+1) - \mathrm{S}(k)] = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(k)\right] = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Par sommation de relation de comparaison avec $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Ainsi $\qquad \mathrm{S}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

Enfin, par croissance de S, on a

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(\lfloor x \rfloor + 1) \geqslant \mathrm{S}(x) \geqslant \mathrm{S}(\lfloor x \rfloor)$$

et $\qquad \ln\left(\frac{\lfloor x \rfloor + 1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \ln\left(\frac{\lfloor x \rfloor}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

ce qui implique $\qquad \ln(\lfloor x \rfloor + 1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x \quad$ et $\quad \ln(\lfloor x \rfloor) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x}$

Exercice 4 (***)

On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(nx)}$

1. Étudier le mode de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de la somme $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$ et $x \to 0$.

Corrigé : 1. Soit $x > 0$. On a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-xn}$ et $\sum \mathrm{e}^{-xn}$ converge en tant que série géométrique d'où la convergence simple d'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs. On a $\|u_n\|_\infty = +\infty$ pour tout n entier non nul ce qui entraîne qu'il n'y a pas convergence normale sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Supposons qu'il y ait convergence uniforme sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On aurait alors R_n borné à partir d'un certain rang et

$$\|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n-1}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{R}_n\|_\infty + \|\mathrm{R}_{n-1}\|_\infty$$

Mais avec l'égalité $\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n-1} = u_n$, on obtient une contradiction évidente puisque u_n n'est pas bornée sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Soit $a > 0$. On a

$$\|u_n\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} = \frac{1}{\mathrm{sh}\,(na)}$$

et on en déduit la convergence normale et donc uniforme sur $[\,a\,;+\infty\,[$ pour $a > 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge simplement sur }]\,0\,;+\infty\,[\text{ et normalement sur } [\,a\,;+\infty\,[\text{ pour tout } a > 0.}$$

2. Soit $x > 0$. La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(xu)}$ est continue, décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Par comparaison série/intégrale, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}\,(tx)} \leqslant \mathrm{S}(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}\,(nx)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}\,(tx)}$$

Avec le changement de variable $u = \mathrm{e}^{tx}$, il vient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}\,(tx)} = \int_1^{+\infty} \frac{2\mathrm{e}^{tx}}{\mathrm{e}^{2tx} - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x}\int_{\mathrm{e}^x}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - 1} = \frac{1}{x}\left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_{\mathrm{e}^x}^{+\infty} = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$$

Puis $\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\right) = \dfrac{1}{x}\left(\ln(\mathrm{e}^x+1) - \ln(x(1+\mathrm{o}(1))\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{\ln(x)}{x} \quad$ et $\quad \dfrac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{\ln(x)}{x}}$

On a pour $x > 0$

$$\mathrm{S}(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}\,(x)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}\,(nx)} = 2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x}) + \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sh}\,(nx)}$$

On pose $\quad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad v_n(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sh}\,(nx)} \quad$ et $\quad w_n(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sh}\,(nx)$

Pour n entier non nul, on a w_n dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec

$$\forall x > 0 \qquad w_n'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(-\mathrm{sh}\,(nx) + n\,\mathrm{ch}\,(nx)\right) \geqslant 0$$

On en déduit la croissance w_n et donc la décroissance de v_n. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|v_n\|_{\infty,[\,1\,;+\infty\,[} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{sh}\,(n)}$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 2}^{+\infty} v_n$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Enfin, on a

$$\forall n \geqslant 2 \qquad v_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-(n-1)x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème de double limite, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{sh}\,(nx)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

D'où
$$\mathrm{S}(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-x})$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{-x}}$$

Exercice 5 (****)

On pose
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;1\,] \qquad u_n(x) = \frac{\sin(nx)x^n}{n}$$

Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[\,0\,;1\,]$.

Corrigé : Soit $a \in \,]\,0\,;1\,[$. On a sans difficulté

$$\|u_n\|_{\infty,[\,0\,;a\,]} \leqslant \frac{1}{na^n}$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $[\,0\,;a\,]$. Concentrons-nous ensuite sur $[\,a\,;1\,]$. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{A}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$

On procède à une transformation d'Abel sur $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)$ avec n et p entiers non nuls. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{p} (\mathrm{A}_k - \mathrm{A}_{k-1})\,(x)\frac{x^k}{k} \\
&= \sum_{k=n+1}^{p} \mathrm{A}_k(x)\frac{x^k}{k} - \sum_{k=n}^{p-1} \mathrm{A}_k(x)\frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= \mathrm{A}_p(x)\frac{x^p}{p} - \mathrm{A}_n(x)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} \mathrm{A}_k(x)\left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) \\
\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) &= \mathrm{A}_p(x)\frac{x^p}{p} - \mathrm{A}_n(x)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} \mathrm{A}_k(x)\frac{(k+1)x^k - kx^{k+1}}{k(k+1)}
\end{aligned}$$

Posons
$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \varphi_k(x) = (k+1)x^k - kx^{k+1}$$

La fonction φ_k est dérivable et on trouve

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \varphi_k'(x) = k(k+1)x^{k-1}(1-x) \geqslant 0$$

D'où la croissance de φ_k sur $[\,0\,;1\,]$. Par ailleurs, on a

$$\mathrm{A}_n(x) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\,ikx}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}}\right)$$

D'où $$\|\mathrm{A}_n\|_{\infty,[\,a\,;1\,]} \leqslant \mathrm{M} \quad \text{avec} \quad \mathrm{M} = \frac{2}{\displaystyle\operatorname*{Inf}_{x\in[\,a\,;1\,]} |1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}x}|}$$

Ainsi $$\forall (k,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad \left|\mathrm{A}_k(x)\frac{-\varphi_k(x)}{k(k+1)}\right| \leqslant \mathrm{M}\frac{\varphi_k(1)}{k(k+1)} = \mathrm{M}\frac{1}{k(k+1)}$$

On peut donc légitimement faire tendre $p \to +\infty$ dans l'expression de $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)$ et on obtient

$$\forall x \in [\,a\,;1\,] \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x) = -\mathrm{A}_n(x)\frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{A}_k(x)\frac{\varphi_k(x)}{k(k+1)}$$

Puis $$\forall x \in [\,a\,;1\,] \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{M}}{k(k+1)}$$

Ainsi $$\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[\,a\,;1\,]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Enfin, on a $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;1\,] \qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[\,0\,;a\,]} + \|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[\,a\,;1\,]}$$

On conclut $$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge uniformément sur } [\,0\,;1\,].}$$

Exercice 6 (****)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3}$$

Étudier la définition et la continuité de S.

Corrigé : On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3}$$

Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathbb{R}$. On a $$\frac{na-1}{n^3} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3} \leqslant \frac{nb}{n^3}$$

d'où $\|u_n\|_{\infty,[\,a\,;b\,]} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ce qui prouve la converge normale et donc uniforme sur tout segment de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$. Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et par conséquent, la somme S est également continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Plus précisément, les fonctions u_n sont continues à droite sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par double limite, on a également S continue à droite sur $\mathbb{R}$ donc en particulier continue à droite sur $\mathbb{Q}$. Il reste à examiner la continuité à gauche sur les points de $\mathbb{Q}$. Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$ avec $x_0 = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$. On a

$$\mathrm{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n^3} = \sum_{n=1,q|n}^{+\infty} \frac{nx_0}{n^3} + \sum_{n=1,q\nmid n}^{+\infty} \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n^3}$$

Puis, si $q|n$, on a $\lfloor nx \rfloor \xrightarrow[x\to x_0^-]{} nx_0 - 1$ et si $q \nmid n$, $\lfloor nx \rfloor \xrightarrow[x\to x_0^-]{} \lfloor nx_0 \rfloor$. Ainsi, par double limite, il vient

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1, q|n}^{+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3} + \sum_{n=1, q\nmid n}^{+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3} \xrightarrow[x \to x_0^-]{} \sum_{n=1, q|n}^{+\infty} \frac{nx_0 - 1}{n^3} + \sum_{n=1, q\nmid n}^{+\infty} \frac{\lfloor nx_0 \rfloor}{n^3}$$

d'où
$$\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} \mathrm{S}(x_0) - \sum_{n=1, q|n}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \mathrm{S}(x_0) - \frac{\zeta(3)}{q^3}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction S est définie, continue à droite sur } \mathbb{R}\text{, continue sur } \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q} \text{ et discontinue à gauche sur } \mathbb{Q}.}$$

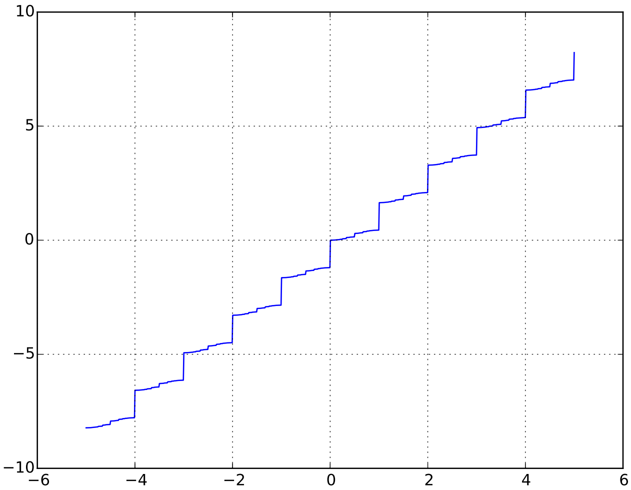

FIGURE 1 – Graphe de la fonction S

Remarque : Avec la discontinuité croissante de la fonction $x \mapsto \dfrac{\lfloor qx \rfloor}{q^3}$ en x_0 et la croissance des autres fonctions, on obtient la discontinuité à gauche en tout rationnel (mais sans la valeur du saut de discontinuité).