ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°46

Exercice 1 (*)

Étudier la convergence simple et normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx^2}$$

Exercice 2 (**)

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = n^2(x^{2n} - x^{2n+1})$$

Exercice 3 (**)

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{1+nx}$$

Exercice 4 (**)

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = \frac{\ln(n+x)}{n^2+x^2}$$

Exercice 5 (*)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$$

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 6 (**)

On pose $$\forall x > -1 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right]$$

1. Montrer que S est définie, continue sur $\mathrm{I} = \,]-1\,;+\infty\,[$.
2. Calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$ pour $x \in \mathrm{I}$.
3. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to -1$.

Exercice 7 (*)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Exercice 8 (**)

On pose $$\forall x > 1 \qquad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,1\,;+\infty\,[$.
2. Préciser la monotonie et convexité de la fonction ζ.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x)$.
4. Déterminer un équivalent simple de $\zeta(x)$ pour $x \to 1^+$.
5. Étudier la convexité de $\ln\circ\zeta$.

Exercice 9 (**)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$$

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une relation reliant $\mathrm{S}(2x)$ et $\mathrm{S}(x)$ pour x réel.
3. En déduire que S n'est pas dérivable en 0.

Exercice 10 (**)

Calculer pour $n \in \mathbb{Z}$ $$\mathrm{I}_n = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\,in\theta}}{1 - 2\mathrm{e}^{\,i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

Exercice 11 (**)

On rappelle $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{\,x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum f_n$ avec
$$\forall (x,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \qquad f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,-x} x^n}{n!}$$