ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°47

Exercice 1 (***)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que η est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Exercice 2 (***)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$$

1. Montrer que S est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$ puis un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$.
3. Déterminer une écriture intégrale de $\mathrm{S}(x)$ pour $x > 0$.
4. En déduire le comportement de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 3 (***)

On pose $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

1. Étudier la définition, la continuité et la dérivabilité de f.
2. Déterminer un équivalent de f en 1^-.

Exercice 4 (**)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\mathrm{th}\,(x+n) - \mathrm{th}\,(n)]$$

1. Montrer que S est définie, continue, croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$ pour $x \geqslant 0$.
3. Étudier la convergence de S en $+\infty$.

Exercice 5 (***)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{n\ln(n)}$$

1. Justifier que f est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour $x \to +\infty$.

Exercice 6 (***)

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \left]\,0\,;+\infty\,\right[\qquad f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

Déterminer un équivalent simple de la somme $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$ et $x \to 0$.

Exercice 7 (***)

Déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Exercice 8 (***)

Soit $f_0 \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. On construit $(f_n)_n$ en posant $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$.

Étudier et évaluer la fonction $g : x \in [\,a\,;b\,] \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Exercice 9 (***)

On pose $$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$$

1. Justifier que S est bien définie et continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$.

Exercice 10 (****)

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels deux à deux distincts. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x - a_n|}{2^n\,(1 + |a_n|)}$$

1. Justifier que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de F.