ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°48

Exercice 1 (***)

On pose $$\mathrm{S}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$$

1. Étudier la définition, la continuité et dérivabilité de S.
2. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x\to 1^-$.

Indications : 1. Pour la continuité et la dérivabilité, étudier la convergence normale sur $[-a\,;a]$ avec $a\in[0\,;1[$.
2. Procéder par comparaison série/intégrale.

Exercice 2 (****)

On pose $$\forall n\geqslant 2\qquad \forall x\geqslant 0\qquad f_n(x)=\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$$

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montre que $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
4. La fonction somme $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n$ est-elle dérivable à droite en 0^+ ?

Indications : 2. Déterminer $\|f_n\|_\infty$ par une étude de fonction.
2. Majorer le reste R_n par un reste de série géométrique puis utiliser une inégalité de convexité.
3. Minorer le taux d'accroissement en zéro par une somme partielle et supposer S dérivable en zéro.

Exercice 3 (***)

On pose $$\forall x\geqslant 0\qquad \mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathrm{Arctan}\,(x+n)-\mathrm{Arctan}\,(n)\right]$$

1. Montrer que S est $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. Déterminer une relation entre $\mathrm{S}(x)$ et $\mathrm{S}(x+1)$.
3. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x\to+\infty$.

Indications : 1. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour la convergence simple.
2. Observer un téléscopage.
3. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(n)$ pour $n\to+\infty$ puis exploiter la monotonie de S pour conclure sur $\mathrm{S}(x)$ avec $x\to+\infty$.

Exercice 4 (***)

On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \left]\, 0\,; +\infty \,\right[\qquad u_n(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$

1. Étudier le mode de convergence de $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de la somme $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$ et $x \to 0$.

Indications : 1. Pour la convergence uniforme sur $\left]\, 0\,; +\infty \,\right[$, supposer qu'elle a lieu puis considérer $\|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n-1}\|_\infty$ où $(\mathrm{R}_n)_n$ est la suite des restes d'ordre n. Considérer ensuite la convergence normale sur $\left[\, a\,; +\infty \,\right[$ avec $a > 0$.
2. Pour $x > 0$, considérer $u \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{sh}(xu)}$ puis procéder par comparaison série/intégrale pour le comportement au voisinage de 0. pour le voisinage de $+\infty$, isoler le premier terme de la somme définissant S puis utiliser le théorème de double limite.

Exercice 5 (****)

On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\, 0\,; 1\,] \qquad u_n(x) = \dfrac{\sin(nx) x^n}{n}$

Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[\, 0\,; 1\,]$.

Indications : Soit $a \in \left]\, 0\,; 1 \,\right[$. Vérifier la convergence normale sur $[\, 0\,; a\,]$. Sur $[\, a\,; 1\,]$, procéder à une transformation d'Abel sur $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_n$ avec n et p entiers non nuls. On pourra étudier la monotonie de $x \mapsto (k+1)x^k - kx^{k+1}$ sur $[\, 0\,; 1\,]$.

Exercice 6 (****)

On pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n^3}$

Étudier la définition et la continuité de S.

Indications : Établir la convergence normale sur tout segment, la continuité sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ puis la continuité à droite sur $\mathbb{R}$ à l'aide du théorème de double limite. Pour la continuité à gauche en un point $x_0 \in \mathbb{Q}$ avec $x_0 = \dfrac{p}{q}$ sous forme irréductible, couper la somme définissant $\mathrm{S}(x_0)$ en deux sommes, une avec les indices n tels que $q | n$ et l'autre avec les indices n tels que $q \nmid n$ puis utiliser la double limite.