Feuille d'exercices n°34

Exercice 1 (*)

En considérant la dérivée n-ième de l'application polynomiale $x \mapsto x^{2n}$, déterminer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Corrigé : Notons $f(x) = x^n$ pour x réel. Un récurrence immédiate donne

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Par dérivation en considérant directement f^2 puis $f \times f$ avec la formule de Leibniz, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(f^2\right)^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} x^n \quad \text{et} \quad \left(f^2\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$$

D'où $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(f^2\right)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k = n! x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Par identification $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

Remarque : C'est un cas particulier de la formule de Vandermonde.

Exercice 2 (*)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\,|x - y|^{\alpha}$$

avec $k > 0$ et $\alpha > 1$.

Corrigé : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ distincts. Il vient

$$\left\|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right\| \leqslant k\,|x - y|^{\alpha - 1}$$

Fixant x et faisant $y \to x$, il s'ensuit que f est dérivable en tout point x avec $f'(x) = 0_{\mathrm{E}}$. Il s'ensuit que f est constante. La réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{\text{Les fonctions constantes sont les solutions.}}$$

Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{M} : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{M}(t)^\top \mathrm{M}(t) = \mathrm{I}_{2n+1}$$

Montrer que $\mathrm{M}'(t) \notin \mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{R})$ pour tout t réel.

Corrigé : Par dérivation, la transposition commutant avec la dérivation, on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{M}'(t)^\top \mathrm{M}(t) + \mathrm{M}(t)^\top \mathrm{M}'(t) = 0$$

d'où $\quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \det\left(\mathrm{M}'(t)^\top \mathrm{M}(t)\right) = \det\left(-\mathrm{M}(t)^\top \mathrm{M}'(t)\right) = (-1)^{2n+1} \det\left(\mathrm{M}(t)^\top \mathrm{M}'(t)\right)$

Or, par invariance par transposition du déterminant, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \det\left(\mathrm{M}(t)^\top \mathrm{M}'(t)\right) = \det\left(\mathrm{M}'(t)^\top \mathrm{M}(t)\right)$$

puis $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \det\left(\mathrm{M}'(t)^\top \mathrm{M}(t)\right) = 0 \iff \det(\mathrm{M}'(t)) \times \det(\mathrm{M}(t)) = 0$

Comme $\mathrm{M}(t)$ est inversible pour tout t réel d'inverse sa transposée, on obtient

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{M}'(t) \notin \mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{R})}$$

Exercice 4 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ avec ℓ un réel. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. Chercher un contre-exemple pour la réciproque.

Corrigé : Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $a > 0$ tel que $|f'(t) - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant a$. Pour $x \geqslant a$, on a

$$|f(x) - f(a) - \ell(x-a)| = \left|\int_a^x [f'(t) - \ell]\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon(x-a)$$

puis $\qquad \left|\dfrac{f(x)}{x} - \ell\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\left[|f(x) - f(a) - \ell(x-a)| + |f(a) - \ell a|\right] \leqslant \varepsilon + \dfrac{1}{x}|f(a) - \ell a|$

Comme $\qquad \dfrac{1}{x}|f(a) - \ell a| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

il existe un seuil $b > 0$ tel que

$$\forall x \geqslant b \qquad \frac{1}{x}|f(a) - \ell a| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour $x \geqslant c$ avec $c = \max(a, b)$, on a

$$\forall x \geqslant c \qquad \left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| \leqslant 2\varepsilon$$

On conclut $\qquad \boxed{\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell}$

La réciproque est fausse, on peut considérer $f : x \mapsto \sin(x)$ par exemple. On a $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et f' qui n'admet pas de limite en $+\infty$.

Remarque : On peut utiliser l'intégration des relations de comparaison. Si $\ell \neq 0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ell\, \mathrm{d}t$ divergente avec $t \mapsto \ell$ de signe constant et $f'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \ell$. Ainsi, il vient

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^x \ell\, \mathrm{d}t = \ell x$$

Si $\ell = 0$, on a $f'(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$ avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t$ divergente et $t \mapsto 1$ de signe constant. Ainsi, on obtient

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_0^x \mathrm{d}t\right) = \mathrm{o}(x)$$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 5

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x) - f(y) = (x - y) f'\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

Indication : utiliser la bijection $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{2}(x + y, x - y)$.

Corrigé : L'application $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{2}(x + y, x - y)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ avec

$$\begin{cases} u = \dfrac{x + y}{2} \\ v = \dfrac{x - y}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$$

Résoudre le problème sous sa forme originelle équivaut à chercher f dérivable telle que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(u + v) - f(u - v) = 2v f'(u) \tag{1}$$

En particulier, pour $v = 1$, on a

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad f'(u) = \frac{1}{2} [f(u + 1) - f(u - 1)]$$

Comme f est supposée dérivable, il en résulte que f' l'est aussi autrement dit f est deux fois dérivable. On fixe u réel dans la relation (**1**) et on dérive deux fois en v. On obtient

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \qquad f''(u + v) - f''(u - v) = 0$$

autrement dit $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f''(x) = f''(y)$$

Ainsi, la fonction f'' est constante. Par suite, f est nécessairement polynomiale de degré au plus égal à 2. Réciproquement, supposons $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x) - f(y) = a(x^2 - y^2) + b(x - y) = (x - y)\,(a(x + y) + b)$$

et $$(x - y) f'\left(\frac{x + y}{2}\right) = (x - y)\,(a(x + y) + b)$$

On conclut

$$\boxed{\text{Les solutions sont exactement les fonctions polynomiales de degré au plus égal à 2.}}$$

Exercice 6 (**)

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. Soit $f : t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}^2)$ avec $\|f(t)\| = 1$ pour tout $t \in \mathrm{I}$ et $g : t \mapsto (-y(t), x(t))$. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ tel que

$$f' = \gamma g \quad \text{et} \quad g' = -\gamma f$$

Corrigé : On a $\langle f, f \rangle = 1$ d'où par dérivation $2 \langle f', f \rangle = 0$. Comme on a $\langle f, g \rangle = 0$, on en déduit que $f' \in \operatorname{Vect}(g)$ d'où $f' = \gamma g$ avec $\gamma = \langle f', g \rangle \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. En procédant de même avec $\|g, g\| = 1$, on trouve $g' = \delta f$. Puis, en dérivant la relation $\langle f, g \rangle = 0$, on obtient

$$\langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle = \gamma + \delta = 0$$

On conclut $$\boxed{\exists \gamma \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \quad | \quad f' = \gamma g \quad \text{et} \quad g' = -\gamma f}$$

Exercice 7 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ dérivables en zéro et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(2x) = 2f(x)$$

Corrigé : Pour $x = 0$, il vient $f(0) = 0_{\mathrm{E}}$. En remplaçant x par $x/2$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$$

Par récurrence immédiate $\quad \forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \qquad f(x) = 2^n f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$

D'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$f(0 + h) = f(0) + f'(0)h + \mathrm{o}(h)$$

Comme $\dfrac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il s'ensuit

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f'(0)\frac{x}{2^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f'(0)x + \mathrm{o}(1)$$

Ainsi $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f'(0)x$

La synthèse étant immédiate, on conclut

$$\boxed{\text{Les applications vérifiant la relation fonctionnelle sont les } x \mapsto \alpha x \text{ avec } \alpha \in \mathrm{E}.}$$

Exercice 8 (**)

1. Soit n entier non nul. Montrer que

$$\forall p \in [\![\, 0\,;\, n-1 \,]\!] \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k^p = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k^n = (-1)^n n!$$

   Indication : on pourra considérer $\varphi(x) = (1 - \mathrm{e}^x)^n$ pour x réel.

2. Soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Calculer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k f(hk)$.

Corrigé : 1. On a $\qquad \varphi(x) \underset{x\to 0}{=} (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n)$

et d'après le théorème de Taylor-Young appliqué à φ de classe $\mathscr{C}^n$

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

Par ailleurs $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \mathrm{e}^{kx}$

D'où, par dérivation

$$\forall (x, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \qquad \varphi^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k^p \mathrm{e}^{kx}$$

Par unicité du développement limité, on conclut

$$\boxed{\forall p \in [\![\, 0\,;\, n-1 \,]\!] \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k^p = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k k^n = (-1)^n n!}$$

2. D'après le théorème de Taylor-Young appliqué à f de classe $\mathscr{C}^n$, on a

$$f(u) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} u^p + \mathrm{o}(u^n)$$

puis, en permutant les sommes

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(hk) &= \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left[\sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} (hk)^p + \mathrm{o}(h^n) \right] \\ &= \frac{1}{h^n} \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} h^p \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k^p \right] + \mathrm{o}(1) = \frac{1}{h^n} f^{(n)}(0) h^n (-1)^n + \mathrm{o}(1)\end{aligned}$$

On conclut $$\boxed{\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(hk) \xrightarrow[h \to 0]{} (-1)^n f^{(n)}(0)}$$

Exercice 9 (*)

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{C}^0([0\,;1], \mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ avec $\mathrm{M}(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour tout $t \in [0\,;1]$. Montrer

$$\| \int_0^1 \mathrm{M}(t) \, \mathrm{d}t \|_2 \leqslant \sqrt{n}$$

Corrigé : Par inégalité triangulaire, on a

$$\| \int_0^1 \mathrm{M}(t) \, \mathrm{d}t \|_2 \leqslant \int_0^1 \| \mathrm{M}(t) \|_2 \, \mathrm{d}t$$

puis $$\forall t \in [0\,;1] \qquad \| \mathrm{M}(t) \|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}(t)^\top \mathrm{M}(t) \right)} = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{I}_n)} = \sqrt{n}$$

Ainsi $$\boxed{\| \int_0^1 \mathrm{M}(t) \, \mathrm{d}t \|_2 \leqslant \sqrt{n}}$$

Exercice 10 (**)

Calculer $$\lim_{n \to +\infty} \int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$$

Corrigé : On a $\sin\left(\frac{1}{t}\right) \simeq \frac{1}{t}$ pour t grand. L'idée consiste donc à contrôler l'écart entre $\sin t$ et t. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad |\sin(u) - u| \leqslant \frac{u^2}{2}$$

D'où $$\forall t > 0 \qquad \left| \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \right| \leqslant \frac{1}{2t^2}$$

Par suite

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \left| \int_n^{2n} \left[\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \right] \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_n^{2n} \left| \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{2n}$$

On conclut $$\boxed{\int_n^{2n} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to \infty]{} \ln(2)}$$

Remarque : Avec le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, on obtient pour n entier non nul

$$\int_{n}^{2n} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

On peut conclure à nouveau avec l'inégalité de Taylor-Lagrange précédemment mentionnée ou en encadrant $\sin u$ sur $\left[\dfrac{1}{2n}\,;\dfrac{1}{n}\right]$ par monotonie de sin sur $[\,0\,;1\,]$.

Exercice 11 (**)

Déterminer des majorations pour les expressions suivantes :

1. $\left|\sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6}\right|$ pour x réel
2. $\left|\cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}\right|$ pour x réel
3. $\left|\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right|$ pour $x \geqslant 0$

Corrigé : Pour $f \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ telle que $f^{(n+1)}$ soit bornée sur I, on a pour $(a,b) \in \mathrm{I}^2$

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in\mathrm{I}} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

En prenant $a = 0$ et $b = x$, on obtient

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in\mathrm{I}} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

1. On a $\left|\sin^{(4)}\right| \leqslant 1$ et par suite

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| \leqslant \frac{|x|^4}{4!}}$$

2. On a $\left|\cos^{(3)}\right| \leqslant 1$ et par suite

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant \frac{|x|^3}{3!}}$$

3. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et par dérivation

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

d'où $\operatorname*{Sup}_{x\geqslant 0} \left|f^{(3)}(x)\right| \leqslant 2$ et par suite

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leqslant \frac{|x|^3}{3}}$$

Exercice 12 (**)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k+(-1)^k}{n^2}\right)$$

Corrigé : D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad |\sin(u) - u| \leqslant \frac{u^2}{2}$$

On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \Delta_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sin\left(\frac{k+(-1)^k}{n^2}\right) - \frac{k+(-1)^k}{n^2}\right]$

Il vient par inégalité triangulaire pour n entier non nul

$$|\Delta_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|k+(-1)^k\right|^2}{n^4} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{n^4} \leqslant \frac{n(n+1)}{n^4} = \mathrm{o}(1)$$

Par suite, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k+(-1)^k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} + \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k}_{=\mathrm{O}(1)} + \mathrm{o}(1)$$

On conclut $\qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k+(-1)^k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}}$