ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°35

Exercice 1 (***)

Étudier la nature de la suite $(\cos(\sqrt{n}))_n$.

Indication : considérer la sous-suite (n_k) avec $n_k = \lfloor (k\pi)^2 \rfloor$.

Corrigé : Notons $n_k = \lfloor (k\pi)^2 \rfloor$ pour k entier. On a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant (k\pi)^2 - n_k < 1$$

On en déduit notamment $$n_k \underset{k\to+\infty}{\sim} (k\pi)^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$$

On pose $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ pour $x \geqslant 0$. On a f dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ comme composée de telles fonctions et par dérivation

$$\forall x > 0 \qquad f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$$

Pour k entier, il vient par inégalité des accroissements finis appliquée à f sur $[\,n_k\,;(k\pi)^2\,]$

$$|f(n_k) - f((k\pi)^2)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n_k}}|n_k - (k\pi)^2| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n_k}} = \mathrm{o}(1)$$

On a $\cos\left(\sqrt{(k\pi)^2}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$ pour k entier d'où

$$\cos(\sqrt{n_k}) = (-1)^k + \mathrm{o}(1)$$

Ainsi, il existe deux suites extraites (quitte à réextraire pour garantir la stricte croissance) de $(\cos\sqrt{n})_n$ qui admettent des limites différentes. On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (\cos(\sqrt{n}))_n \text{ est divergente.}}$$

Exercice 2 (**)

Déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{\pi}{n+k}\right)$$

Corrigé : Soit f définie par $f(x) = \mathrm{Arctan}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $$(|x|-1)^2 \geqslant 0 \iff \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 1$$

Par suite $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f''(x)| = \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \times \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\mathrm{Arctan}(x) - x| \leqslant \frac{x^2}{2}$$

Combinée à l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{n+k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n+k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{n+k}\right) - \frac{\pi}{n+k}\right| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^2}{(n+k)^2}$$

Puis, par convergence des sommes de Rieamann

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$$

et
$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^2}{(n+k)^2} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^2}{n^2} = \frac{\pi^2}{2n}$$

Ainsi
$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{n+k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n+k} + \mathrm{o}(1) = \ln 2 + \mathrm{o}(1)$$

On conclut
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{n+k}\right) = \pi \ln 2}$$

Exercice 3 (***)

Soit $\mathrm{I} =]\,0\,;+\infty\,[$. On pose $\qquad \forall x \in \mathrm{I} \setminus \{1\} \qquad f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} \setminus \{1\}$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 1. On note g ce prolongement.
3. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Corrigé : On pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ pour $x > 1$ et $\Psi(x) = \displaystyle\int_{1/2}^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ pour $x \in]\,0\,;1\,[$. On a respectivement $\Phi \in \mathscr{C}(]\,1\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ et $\Psi \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;1\,[\,,\mathbb{R})$ d'après le théorème fondamental d'analyse. Puis

$$\forall x > 1 \qquad f(x) = \Phi(x^2) - \Phi(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in]\,0\,;1\,[\qquad f(x) = \Psi(x^2) - \Psi(x)$$

Par composition, on conclut $\qquad \boxed{f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I} \setminus \{1\}\,,\mathbb{R})}$

2. Avec le changement de variable $u = \ln(t) \iff t = \mathrm{e}^u$ de classe $\mathscr{C}^1$, il vient

$$\forall x \in \mathrm{I} \setminus \{1\} \qquad f(x) = \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$$

Distinguons les cas $x > 1$ et $x < 1$. Soit $x > 1$. La fonction exp étant croissante, on a l'encadrement

$$\forall x > 1 \qquad \forall u \in [\,\ln(x)\,;2\ln(x)\,] \qquad \frac{x}{u} \leqslant \frac{\mathrm{e}^u}{u} \leqslant \frac{x^2}{u}$$

et après intégration

$$\forall x > 1 \qquad x\int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant f(x) \leqslant x^2\int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u} \iff \ln(2)\,x \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)\,x^2$$

Faisant tendre $x \to 1^+$, il vient par encadrement que $f(x) \xrightarrow[x\to1^+]{} \ln(2)$. Soit $x \in]\,0\,;1\,[$. On a $\ln(x) < 0$ puis

$$\forall x \in \left]\,0\,;1\,\right[\qquad \forall u \in [\,2\ln(x)\,;\ln(x)\,] \qquad \frac{x}{u} \leqslant \frac{\mathrm{e}^u}{u} \leqslant \frac{x^2}{u}$$

et après intégration

$$\forall x \in \left]\,0\,;1\,\right[\qquad x\int_{2\ln(x)}^{\ln(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u} \leqslant -f(x) \leqslant x^2\int_{2\ln(x)}^{\ln(x)} \frac{\mathrm{d}u}{u} \iff x^2\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant x\ln(2)$$

Faisant tendre $x \to 1^-$, il vient par encadrement que $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ln(2)$. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ se prolonge par continuité en } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathrm{I} \smallsetminus \{1\} \\ \ln(2) & \text{si } x = 1 \end{cases}.}$$

4. Par construction, on a $g \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(\mathrm{I} \smallsetminus \{1\}\,,\mathbb{R})$. Par dérivation, on a

$$\forall x \in \mathrm{I} \smallsetminus \{1\} \qquad g'(x) = f'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Avec l'équivalent usuel $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$, il s'ensuit que $g'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 1$. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \left]\,0\,;+\infty\,\right[.}$$

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie, $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ dérivable en zéro telle que $f(0) = 0$.
Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$ admet une limite pour $n \to +\infty$ et la déterminer.

Corrigé : Soit n entier non nul. D'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \mathrm{o}(x) = f'(0)x + \mathrm{o}(x)$$

d'où
$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)\frac{n+1}{2n} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{o}\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

La somme des o est difficile à contrôler puisque ces o dépendent *a priori* à la fois de k et de n. Pour éviter cette difficulté, on écrit

$$f(x) = f'(0)x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Ainsi
$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)\frac{n+1}{2n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

On a
$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!] \qquad \left|\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leqslant \|\varepsilon\|_{\infty,[\,0\,;\frac{1}{n}\,]}$$

Et comme $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a $\|\varepsilon\|_{\infty,[\,0\,;\frac{1}{n}\,]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Par suite, on obtient

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\frac{n+1}{2n}\right| \leqslant \|\varepsilon\|_{\infty,[\,0\,;\frac{1}{n}\,]}\frac{n+1}{2n} = \mathrm{o}(1) \times \mathrm{O}(1) = \mathrm{o}(1)$$

On conclut
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f'(0)}{2}}$$

Exercice 5 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn et $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathrm{E})$ avec $f(a) = 0$. Montrer

$$\Big\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \operatorname*{Sup}_{t\in[\,a\,;b\,]} \|f'(t)\|$$

Corrigé : On a f' continue sur $[\,a\,;b\,]$ donc bornée sur ce segment. D'après l'inégalité des accroissements finis, il vient

$$\forall t \in [\,a\,;b\,] \qquad \|f(t)\| = \|f(t) - f(a)\| \leqslant \operatorname*{Sup}_{u\in[\,a\,;b\,]} \|f'(u)\|\,|t-a|$$

Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\Big\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \operatorname*{Sup}_{u\in[\,a\,;b\,]} \|f'(u)\|(t-a)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi
$$\boxed{\Big\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \operatorname*{Sup}_{t\in[\,a\,;b\,]} \|f'(t)\|}$$

Variante : On pose F définie sur $[\,a\,;b\,]$ par $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in [\,a\,;b\,]$. On a $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^2([\,a\,;b\,],\mathrm{E})$ et d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$\|\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}'(a)(b-a)\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \operatorname*{Sup}_{t\in[\,a\,;b\,]} \|\mathrm{F}''(t)\|$$

et avec $\mathrm{F}'(a) = f(a) = 0$, on retrouve le résultat attendu.

Exercice 6 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-evn de dimension finie et $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathrm{E})$. On suppose que f et f'' sont bornées. On note $\mathrm{M}_0 = \|f\|_\infty$ et $\mathrm{M}_2 = \|f''\|_\infty$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\quad \forall h > 0 \qquad \|f'(x)\| \leqslant \dfrac{2\mathrm{M}_0}{h} + \dfrac{h\mathrm{M}_2}{2}$.
2. En déduire $\qquad \mathrm{M}_1 = \|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$
3. Peut-on améliorer l'inégalité ?

Corrigé : 1. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^2 \qquad \|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2 h^2}{2}$$

d'où, par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\|hf'(x)\| &= \|f(x+h) - f(x) - hf'(x) - f(x+h) + f(x)\| \\ &\leqslant \|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| + \|f(x+h)\| + \|f(x)\| \leqslant 2\mathrm{M}_0 + \frac{\mathrm{M}_2h^2}{2}\end{aligned}$$

Ainsi
$$\boxed{\forall (x,h) \in \mathbb{R} \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad \|f'(x)\| \leqslant \frac{2\mathrm{M}_0}{h} + \frac{h\mathrm{M}_2}{2}}$$

2. Si $\mathrm{M}_2 = 0$, on a $\|f'(x)\| \leqslant \dfrac{2\mathrm{M}_0}{h}$ pour tout $h > 0$ et faisant tendre $h \to +\infty$, il s'ensuit $\|f'(x)\| = 0$ pour tout x réel. L'inégalité a donc lieu. Si $\mathrm{M}_2 \neq 0$, on pose

$$\forall h > 0 \qquad \varphi(h) = \frac{2\mathrm{M}_0}{h} + \frac{h\mathrm{M}_2}{2}$$

Par dérivation $\qquad \forall h > 0 \qquad \varphi'(h) = -\dfrac{2\mathrm{M}_0}{h^2} + \dfrac{\mathrm{M}_2}{2} \geqslant 0 \iff h \leqslant 2\sqrt{\dfrac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{M}_2}}$

et par suite $\qquad \underset{h>0}{\mathrm{Inf}}\ \varphi(h) = \varphi\left(2\sqrt{\dfrac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{M}_2}}\right) = 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$

Passant à la borne inférieure en $h > 0$ de part et d'autre dans l'inégalité

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R} \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad \|f'(x)\| \leqslant \varphi(h)$$

on obtient $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \|f'(x)\| \leqslant \underset{h>0}{\mathrm{Inf}}\ \varphi(h)$

Et passant à la borne supérieure en x réel, on conclut

$$\boxed{\mathrm{M}_1 \leqslant 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}}$$

3. Pour x, h réels, avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2 h^2}{2} \quad \text{et} \quad \|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\| \leqslant \frac{\mathrm{M}_2 h^2}{2}$$

puis

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)\| &= \|f(x+h) - f(x) - hf'(x) - (f(x-h) - f(x) + hf'(x))\| \\ &\leqslant \|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| + \|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\| \end{aligned}$$

$$\|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)\| \leqslant \mathrm{M}_2 h^2$$

et

$$\begin{aligned} \|2hf'(x)\| &= \|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x) - f(x+h) + f(x-h)\| \\ &\leqslant \|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)\| + \|f(x+h)\| + \|f(x-h)\| \leqslant 2\mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_2 h^2 \end{aligned}$$

d'où $\qquad \forall h > 0 \qquad \|f'(x)\| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}_0}{h} + \dfrac{\mathrm{M}_2 h}{2}$

On pose $\qquad \forall h > 0 \qquad \psi(h) = \dfrac{\mathrm{M}_0}{h} + \dfrac{\mathrm{M}_2 h}{2}$

On trouve $\qquad \underset{h>0}{\mathrm{Inf}}\ \psi(h) = \psi\left(\sqrt{2\dfrac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{M}_2}}\right) = \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{M}_1 \leqslant \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}}$

Remarque : Il s'agit de la première inégalité de *Landau-Kolmogorov.*

Exercice 7 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé de dimension finie et $f \in \mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$. On suppose qu'il existe $k \in]\,0\,;1\,[$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|f^2(x) - f^2(y)\| \leqslant k\|x - y\|$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Corrigé : Soit $a \in \mathrm{E}$. On définit la suite $(x_n)_n$ à valeurs dans E par

$$x_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

Alors, pour n entier non nul, on a

$$\|x_{2(n+1)} - x_{2n}\| = \|f^2(x_{2n}) - f^2(x_{2(n-1)})\| \leqslant k\|x_{2n} - x_{2(n-1)}\|$$

Par récurrence immédiate, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|x_{2(n+1)} - x_{2n}\| \leqslant k^n\|x_2 - x_0\|$$

On en déduit la convergence absolue et donc la convergence de la série téléscopique $\sum \left[x_{2(n+1)} - x_{2n}\right]$ ce qui prouve la convergence de la suite $(x_{2n})_n$. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathrm{E}$ tel que $x_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$. De la même manière, on établit qu'il existe $\beta \in \mathrm{E}$ tel que $x_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$. L'application f^2 est k-lipschitzienne donc continue et par conséquent

$$x_{2(n+1)} = f^2(x_{2n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\alpha) \quad \text{et} \quad x_{2(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$$

Par unicité de la limite, il s'ensuit $\alpha = f^2(\alpha)$ et de même $\beta = f^2(\beta)$. On a

$$\|\alpha - \beta\| = \|f^2(\alpha) - f^2(\beta)\| \leqslant k\|\alpha - \beta\|$$

d'où $\|\alpha - \beta\| = 0$ et on en déduit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$. Puis, en observant $f^3(\alpha) = f(f^2(\alpha)) = f(\alpha)$, il vient

$$\|\alpha - f(\alpha)\| = \|f^2(\alpha) - f^3(\alpha)\| \leqslant k\|\alpha - f(\alpha)\|$$

d'où $\|\alpha - f(\alpha)\| = 0$ ce qui prouve que α est point fixe de la suite $(x_n)_n$. Enfin, soit $\gamma \in \mathrm{E}$ point fixe de f. Il est *a fortiori* point fixe de f^2 d'où

$$\|\alpha - \gamma\| = \|f^2(\alpha) - f^2(\gamma)\| \leqslant k\|\alpha - \gamma\|$$

ce qui prouve $\|\alpha - \gamma\| = 0$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un unique point fixe.}}$$

Exercice 8 (***)

Déterminer $\qquad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sin(2\pi n!\mathrm{e}) \quad \text{puis} \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 \sin(2\pi n!\mathrm{e})$

Corrigé : D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

Ainsi, on dispose de N entier tel que

$$2\pi n!\mathrm{e} = 2\pi\mathrm{N} + 2\pi \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

D'où $\qquad 2\pi n!\mathrm{e} = 2\pi\mathrm{N} + \mathrm{o}(1) \quad \text{puis} \quad \sin(2\pi n!\mathrm{e}) = \sin \mathrm{o}(1)$

Puis $\qquad \displaystyle\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$

et comme précédemment $\qquad \displaystyle 2\pi n!\mathrm{e} = 2\pi\mathrm{N} + \frac{2\pi}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

puis $$n^2 \sin(2\pi n!\mathrm{e}) = n^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2\pi n + \mathrm{o}(n)$$

On conclut $$\boxed{\sin(2\pi n!\mathrm{e}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad n^2 \sin(2\pi n!\mathrm{e}) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty}$$