ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°38

Exercice 1 (**)

Étudier selon $\alpha > 1$ la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right)$ et en cas de finitude, exprimer sa somme à l'aide de la fonction ζ de Riemann.

Corrigé : D'après le théorème de Fubini pour une famille à termes positifs, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_{[\![0\,;\,k-1]\!]}(n)}{k^\alpha}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_{[\![0\,;\,k-1]\!]}(n)}{k^\alpha}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

et
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}} < +\infty \iff \alpha - 1 > 1$$

On conclut

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right) < +\infty \iff \alpha > 2 \quad \text{et} \quad \alpha > 2 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right) = \zeta(\alpha-1)}$$

Variante : Posons
$$\mathrm{I} = \{(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \mid 0 \leqslant n < k\}$$

et $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \{n\} \times \{k \in \mathbb{N} \mid k > n+1\} \quad$ et $\quad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{J}_k = [\![0\,;\,k-1]\!] \times \{k\}$

Les famille $(\mathrm{I}_n)_n$ et $(\mathrm{J}_k)_{k\geqslant 1}$ sont des recouvrements disjoints de I et d'après le théorème de sommation par paquets pour une famille à termes positifs, il vient

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{(n,k)\in\mathrm{I}_p}\frac{1}{k^\alpha}\right) = \sum_{(n,k)\in\mathrm{I}}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\sum_{(n,k)\in\mathrm{J}_\ell}\frac{1}{k^\alpha}\right) = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{1}{\ell^{\alpha-1}}$$

On conclut comme précédemment.

Exercice 2 (***)

Soit α réel. Étudier la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$.

Corrigé : Notons

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \qquad u_{m,n} = \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \quad \text{et} \quad v_{m,n} = \frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}$$

Ces familles sont à termes positifs. On a l'encadrement

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \qquad \frac{1}{2}(m+n)^2 \leqslant m^2+n^2 \leqslant (m+n)^2$$

d'où pour $\alpha \geqslant 0 \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \qquad \dfrac{1}{(m+n)^{2\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \leqslant \dfrac{2^\alpha}{(m+n)^{2\alpha}}$

et l'encadrement est inversé pour $\alpha \leqslant 0$. Il s'ensuit

$$\left(u_{m,n}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \text{ sommable} \iff \left(v_{m,n}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \text{ sommable}$$

Posons $$\forall p \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_p = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid m+n=p\right\}$$

La famille $(\mathrm{I}_p)_{p\geqslant 2}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^{*2}$ et on a

$$\forall p \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_p = \{(m, p-m),\ m \in [\![1\,;\, p-1]\!]\}$$

Par suite $$\sum_{(m,n)\in \mathrm{I}_p} v_{m,n} = \sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{p^{2\alpha}} = \frac{p-1}{p^{2\alpha}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p^{2\alpha-1}}$$

Ainsi, d'après le critère de Riemann et le critère des équivalents, licite pour une famille à termes positifs, puis le théorème de sommation par paquets, il vient

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} v_{m,n} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{2\alpha}} < +\infty \iff 2\alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 1$$

On conclut $\boxed{\text{La famille } (u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \text{ est sommable si et seulement si } \alpha > 1.}$

Exercice 3 (***)

Soit α réel. Étudier la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{m^\alpha + n^\alpha}$.

Corrigé : Pour $\alpha \geqslant 1$, il vient par convexité de $u \mapsto u^\alpha$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \qquad m^\alpha + n^\alpha = 2\left(\frac{m^\alpha}{2} + \frac{n^\alpha}{2}\right) \geqslant 2\left(\frac{m+n}{2}\right)^\alpha = 2^{1-\alpha}(m+n)^\alpha$$

puis

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \qquad \left(\frac{m}{m+n}\right)^\alpha + \left(\frac{n}{m+n}\right)^\alpha \leqslant \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} \iff (m+n)^\alpha \geqslant m^\alpha + n^\alpha$$

D'où $$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \qquad \frac{1}{(m+n)^\alpha} \leqslant u_{m,n} = \frac{1}{m^\alpha + n^\alpha} \leqslant \frac{2^{\alpha-1}}{(m+n)^\alpha}$$

Si $\alpha < 1$, il suffit d'observer $m^\alpha + n^\alpha \leqslant m + n$ pour m et n entiers non nuls. Dans tous les cas, avec le recouvrement disjoint $(\mathrm{I}_p)_{p\geqslant 2}$ où $\mathrm{I}_p = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid m+n=p\right\}$, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } (u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \text{ est sommable si et seulement si } \alpha > 2.}$$

Exercice 4 (***)

Montrer l'égalité $$2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{2^n}$$

Corrigé : Posons

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est un carré non nul} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{1\leqslant k^2\leqslant n} a_{k^2} b_{n-k^2} = \sum_{1\leqslant k^2\leqslant n} \frac{1}{2^{k^2}} \frac{1}{2^{n-k^2}} = \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{2^n} \quad \text{et} \quad c_0 = 0$$

La série $\sum b_n$ converge absolument comme série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et la comparaison $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ fournit également la convergence absolue de la série $\sum a_n$. Ainsi, d'après le théorème du produit de Cauchy, la série $\sum c_n$ converge absolument et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right)$$

Finalement $$\boxed{2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n}}$$

Variantes : 1. Pour k entier, on note $\mathrm{I}_k = [\![k^2 \,;\, (k+1)^2 - 1]\!]$. La famille $(\mathrm{I}_k)_{k \geqslant 1}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^*$. On note $u_n = \dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n}$ pour n entier. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{n \in \mathrm{I}_k} u_n = \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{k}{2^n} = 2k \frac{1}{2^{k^2}}\left(1 - \frac{1}{2^{(k+1)^2 - k^2}}\right) = 2k\left(\frac{1}{2^{k^2}} - \frac{1}{2^{(k+1)^2}}\right)$$

puis $$\sum_{k=1}^{+\infty} 2k\left(\frac{1}{2^{k^2}} - \frac{1}{2^{(k+1)^2}}\right) = 2\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k^2}} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{2^{k^2}}\right) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k^2}}$$

Ainsi, par théorème de sommation par paquets pour une famille à termes positifs, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n \in \mathrm{I}_k} u_n\right) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k^2}}$$

2. D'après le théorème de Fubini pour une famille à termes positifs, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{[\![m^2 \,;\, +\infty [\![}(n)}{2^n}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{[\![m^2 \,;\, +\infty [\![}(n)}{2^n}\right) = \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=m^2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2}{2^{m^2}}\end{aligned}$$

Exercice 5 (***)

On précise que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)}$.

Corrigé : Notons $\qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad u_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$

La famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est à termes positifs et on a

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad u_{p,q} = \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}$$

D'après le théorème de Fubini et par téléscopage, il vient

$$\boxed{\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+1+q^2}\right]\right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Pour n entier non nul, on pose

$$\mathrm{I}_n = \{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid p + q^2 = n\}$$

La famille $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et d'après le théorème de sommation par paquets, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(p,q)\in\mathrm{I}_n} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(p,q)\in\mathrm{I}_n} \frac{1}{n(n+1)} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Card}\ \mathrm{I}_n}{n(n+1)}\end{aligned}$$

Enfin, on a $\mathrm{Card}\ \mathrm{I}_n = \sum\limits_{1\leqslant q^2\leqslant n} 1 = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ d'où

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n(n+1)} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Variante : On peut aussi écrire, d'après le théorème de Fubini pour une famille à termes positifs

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{[\![q^2\,;\,+\infty [\![}(n)}{n(n+1)} \right) \\ &= \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{[\![q^2\,;\,+\infty [\![}(n)}{n(n+1)} \right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=q^2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] \right) = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2}\end{aligned}$$

Exercice 6 (***)

On précise que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Calculer

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2},\ m\wedge n=1} \frac{1}{n^2m^2}$$

Corrigé : D'après le théorème de Fubini positif, on a

$$\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{n^2m^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2m^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \right) = \frac{\pi^4}{36}$$

Pour d entier non nul, on note

$$\mathrm{I}_d = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid m \wedge n = d\right\}$$

La famille $(\mathrm{I}_d)_{d\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^{*2}$. Ainsi, d'après le théorème de sommation par paquets, il vient

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{n^2m^2} = \sum_{d=1}^{+\infty} \left(\sum_{(m,n)\in\mathrm{I}_d} \frac{1}{m^2n^2} \right)$$

Par ailleurs, on a pour d entier non nul

$$(m,n) \in \mathrm{I}_d \iff \exists!(m',n') \in \mathrm{I}_1 \mid (m,n) = (dm',dn')$$

d'où
$$\mathrm{I}_d = \{(dm',dn'),\ (m',n') \in \mathrm{I}_1\}$$

Par suite
$$\sum_{(m,n)\in\mathrm{I}_d} \frac{1}{m^2n^2} = \sum_{(m',n')\in\mathrm{I}_1} \frac{1}{d^4} \times \frac{1}{m'^2n'^2}$$

Ainsi
$$\sum_{d=1}^{+\infty} \left(\sum_{(m,n)\in\mathrm{I}_d} \frac{1}{m^2n^2} \right) = \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^4} \right) \left(\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2},\ m\wedge n=1} \frac{1}{n^2m^2} \right)$$

Finalement $$\boxed{\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2},\ m\wedge n=1}\frac{1}{n^2m^2}=\frac{\pi^4}{36}\times\frac{90}{\pi^4}=\frac{5}{2}}$$

Exercice 7 (***)

Soit $\sigma:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ bijective. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Corrigé : On note $\mathrm{S}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sigma(k)}{k^2}$ pour n entier non nul. Par suite

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \mathrm{S}_{2n}-\mathrm{S}_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sigma(k)}{k^2}\geqslant\frac{1}{(2n)^2}\sum_{k=n+1}^{2n}\sigma(k)$$

Comme σ réalise une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$, on a

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \sum_{k=n+1}^{2n}\sigma(k)\geqslant\sum_{k=1}^{n}k\geqslant\frac{n^2}{2}$$

d'où $$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \mathrm{S}_{2n}-\mathrm{S}_n\geqslant\frac{1}{(2n)^2}\times\frac{n^2}{2}=\frac{1}{8}$$

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\sigma(n)}{n^2}$ était convergente, on aurait $\mathrm{S}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathrm{S}$ avec S un réel et par suite

$$\mathrm{S}_{2n}-\mathrm{S}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathrm{S}-\mathrm{S}=0$$

ce qui est absurde. Par conséquent

$$\boxed{\text{La série }\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sigma(n)}{n^2}\text{ diverge.}}$$

Exercice 8 (****)

Soit $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijective. Étudier la nature de $\sum\frac{\sigma(n)}{n!}$.

Corrigé : Si $\sigma=\mathrm{id}$, la série converge. Mais ce n'est pas toujours le cas. Construisons une permutation σ telle que la série diverge. L'ensemble $\mathrm{D}=\mathbb{N}\smallsetminus\{(2n)!,n\in\mathbb{N}\}$ est dénombrable. Notons φ une bijection de $\mathbb{N}$ sur D. On définit σ sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \sigma(2n)=(2n)!\quad\text{et}\quad\sigma(2n+1)=\varphi(n)$$

Par construction, l'application σ est injective et surjective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. On a

$$\frac{\sigma(2n)}{(2n)!}=1\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}0$$

Ainsi $$\boxed{\text{La série }\sum\frac{\sigma(n)}{n!}\text{ peut converger ou diverger.}}$$