TD ONDES ELECTROMAGNETIQUES I

Exercice 1*♥ : SUPERPOSITION DE DEUX ONDES OBLIQUES

1) Une OEMPPM de champ $\overrightarrow{E_1}$ d'amplitude E_0, de pulsation ω, polarisée rectilignement suivant $\overrightarrow{u_z}$, se propage dans le vide suivant la direction de vecteur unitaire $\overrightarrow{n_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

   a) Donner l'expression du champ électrique complexe $\underline{\overrightarrow{E_1}}(M,t)$ en fonction entre autres des coordonnées cartésiennes du point M.

   b) Donner l'expression du champ magnétique $\underline{\overrightarrow{B_1}}(M,t)$ correspondant.

2) On lui superpose une deuxième onde de champ $\underline{\overrightarrow{E_2}}(M,t) = -E_0 exp\left(i\omega\left(t - \frac{x+y}{\sqrt{2}c}\right)\right)\overrightarrow{u_z}$

   a) Quel est le vecteur $\overrightarrow{n_2}$ de sa direction de propagation ? Faire un dessin avec les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ et expliquer physiquement la deuxième onde à partir de la première dans le cas de la présence d'un plan conducteur parfait (on verra au CH EM8 qu'il y a réflexion totale sur un tel conducteur)

   b) Exprimer le champ électrique de l'onde résultante et commenter sa structure.

Exercice 2*♥ : CARACTERISTIQUES D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE

On étudie l'onde électromagnétique de champ électrique $\vec{E} = a.\sin(\alpha x).\cos(\omega t\text{-}kz).\overrightarrow{u_y}$ avec $k > 0$.

1) Cette onde est-elle plane ? progressive ? harmonique ? Quels sont sa polarisation, sa direction de propagation, son vecteur d'onde ?
2) Calculer le champ magnétique correspondant.
3) Cette onde se propage dans le vide. Etablir sa relation de dispersion.
4) Calculer la puissance moyenne rayonnée à travers la surface rectangulaire dont les sommets ont pour coordonnées $(0,0,z_0)$, $(x_0,0,z_0)$, $(0,y_0,z_0)$, (x_0,y_0,z_0).

Exercice 3♥ :** VITESSE DE L'ENERGIE D'UNE ONDE DANS UN CABLE COAXIAL

On considère un câble coaxial de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur R_2, d'axe Oz. Une onde électromagnétique se propage dans l'espace entre les armatures qui a les propriétés électromagnétiques du vide. En coordonnées cylindriques, le champ électrique de l'onde est de la forme :
$\underline{\vec{E}} = E(r)\vec{u}_r e^{j(\omega t - kz)}$ avec $E(R_1)=E_0$.

On utilisera les opérateurs d'analyse vectorielle en coordonnées cylindriques donnés page suivante.

1) En écrivant que le champ électromagnétique doit vérifier les équations de Maxwell, exprimer le champ électrique $\underline{\vec{E}}$ et le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ en fonction de E_0, R_1, k, ω, r, t et des vecteurs de base des coordonnées cylindriques. En déduire aussi la relation de dispersion.
2) Exprimer la moyenne sur le temps du vecteur de Poynting et la puissance moyenne transportée par l'onde.
3) Calculer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique. En déduire la vitesse moyenne de propagation de l'énergie.

On donne les opérateurs d'analyse vectorielle en coordonnées cylindriques :

$$gr\vec{a}d(V)=\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial V}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial V}{\partial z}\end{array}\right. \qquad r\vec{o}t(\vec{a})=\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_z}{\partial \theta}-\dfrac{\partial a_\theta}{\partial z}\\ \dfrac{\partial a_r}{\partial z}-\dfrac{\partial a_z}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r a_\theta)}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta}\end{array}\right.$$

$$div(\vec{a})=\frac{1}{r}\frac{\partial (r a_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Laplacien scalaire : $\Delta V=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial V}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Laplacien vecteur : $\vec{\Delta}\vec{a}=\left|\begin{array}{l}\Delta a_r-\dfrac{a_r}{r^2}-\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial a_\theta}{\partial \theta}\\ \Delta a_\theta-\dfrac{a_\theta}{r^2}+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta}\\ \Delta a_z\end{array}\right.$

Réponses :

Ex 1 : 1)a) $\underline{\overrightarrow{E_1}}=E_0\exp\,[\mathrm{i}\,(\omega t-\frac{\omega}{c\sqrt{2}}(x-y))]\overrightarrow{e_z}$

b) $\underline{\overrightarrow{B_1}}=-\frac{E_0}{\sqrt{2}c}\exp\,[\mathrm{i}\,(\omega t-\frac{\omega}{c\sqrt{2}}(x-y))](\overrightarrow{e_x}+\overrightarrow{e_y})$

2)a) $\overrightarrow{n_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{e_x}+\overrightarrow{e_y})$

b) $\vec{E}=-2E_0\sin(\frac{\omega}{c\sqrt{2}}y)\sin(\omega t-\frac{\omega}{c\sqrt{2}}x)\ \overrightarrow{e_z}$ *Onde progressive suivant…stationnaire suivant…*

Ex 2 : 2) $\vec{B}=-\frac{ka}{\omega}\sin(\alpha x)\cos(\omega t-kz)\overrightarrow{e_x}-\frac{\alpha a}{\omega}\cos(\alpha x)\sin(\omega t-kz)\overrightarrow{e_z}$

3) $\alpha^2+k^2=\varepsilon_0\mu_0\omega^2$

4) $P_{moy}=\frac{ka^2y_0}{4\mu_0\omega}\left[x_0-\frac{\sin(2\alpha x_0)}{2\alpha}\right]$

Ex 3 : 1) $\underline{\vec{E}}=+\frac{R_1}{r}E_0e^{i(\omega t-kz)}\overrightarrow{u_r}$ $\underline{\vec{B}}=+\frac{k}{\omega}\frac{R_1}{r}E_0e^{i(\omega t-kz)}\overrightarrow{u_\theta}$ $k=\omega/c$

2) $\langle\vec{R}\rangle=\frac{E_0^2R_1^2}{2\mu_0cr^2}\overrightarrow{u_z}$ $P_{moy}=\frac{E_0^2R_1^2\pi}{\mu_0c}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

3) $\langle u\rangle=\frac{\varepsilon_0E_0^2R_1^2}{2r^2}$ *vitesse moyenne de l'énergie* $c\overrightarrow{u_z}$