ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°51

Exercice 1 (**)

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$.
2. Montrer que la suite $\left(\ln(n) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
3. En déduire un équivalent de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$ pour $x \to 1^-$.

Corrigé : 1. Avec $\ln(2) \leqslant \ln(n) \leqslant n-1 \leqslant n$ pour tout $n \geqslant 2$, il vient

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

2. On pose $u_n = \ln(n) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour n entier non nul. On a pour $n \geqslant 2$

$$u_n - u_{n-1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$ converge absolument et d'après le lien suite/série téléscopique, on en déduit la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et par conséquent

$$\boxed{\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \mathrm{O}(1)}$$

3. Soit $x \in [\,0\,;1\,[$. On a

$$(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n = (1-x)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n\right)$$

D'après théorème sur le produit de Cauchy de séries entières, chaque série entière concernée ayant un rayon de convergence égal à 1, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Notant M un majorant de $\left|\ln(n) - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right|$, il vient par inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]x^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right|x^n \leqslant \mathrm{M}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{\mathrm{M}}{1-x}$$

d'où
$$(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n = \mathrm{O}(1) - \ln(1-x) \underset{x\to 1}{\sim} -\ln(1-x)$$

Ainsi
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}}$$

Exercice 2 (**)

Soit $(a_n)_n$ suite non nulle T-périodique avec T entier non nul.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Déterminer sa somme S sur l'intervalle ouvert de convergence.

Corrigé : 1. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$. La suite $(a_n)_n$ prend un nombre fini de valeurs donc est bornée d'où $\mathrm{R} \geqslant 1$. Par ailleurs, la suite $(a_n)_n$ est non nulle donc il existe p entier tel que $a_p \neq 0$ et par suite $a_{p+\mathrm{T}n} \neq 0$ pour tout n entier. Par conséquent, la série $\sum a_n$ diverge grossièrement d'où $\mathrm{R} \leqslant 1$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{R} = 1}$$

2. Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$. Pour N entier, on a

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{NT}-1} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\mathrm{T}-1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} a_{n+k\mathrm{T}} x^{n+k\mathrm{T}} = \left(\sum_{n=0}^{\mathrm{T}-1} a_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} x^{k\mathrm{T}}\right)$$

Faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\mathrm{T}-1} a_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{k\mathrm{T}}\right)$$

On conclut
$$\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{1}{1-x^{\mathrm{T}}}\sum_{n=0}^{\mathrm{T}-1} a_n x^n}$$

Exercice 3 (***)

Soit $(a_n)_n$ la suite réelle définie par $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = 0$$

1. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ vérifie $\mathrm{R} \geqslant 1$.
2. Montrer $$\forall z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{2}{\mathrm{e}^{z}+1}$$
3. En déduire l'expression du développement en série entière de la fonction tan sur $\left]-\frac{\mathrm{R}}{2}\,;\frac{\mathrm{R}}{2}\right[$.

Corrigé : 1. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}$$

Montrons par récurrence forte que $|a_n| \leqslant 1$ pour tout n entier. L'initialisation est immédiate. Si la propriété est vraie jusqu'à $n-1$ avec n entier non nul, on a

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n-k}|}{k!} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2} \leqslant 1$$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{R} \geqslant 1}$$

2. Soit $z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. On a

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{e}^{z})\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n + \sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n-k}}{k!}\right) z^n = 2a_0 = 2\end{aligned}$$

Le produit est non nul ce qui prouve que $1+\mathrm{e}^z \neq 0$ et par suite

$$\boxed{\forall z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{2}{\mathrm{e}^z+1}}$$

Remarque : Comme $1+\mathrm{e}^z \neq 0$, on en déduit $\mathrm{R} \leqslant \pi$.

3. Pour $x \in \left]-\dfrac{\mathrm{R}}{2}\,;\dfrac{\mathrm{R}}{2}\right[\subset \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})} = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+1)} = -\mathrm{i}\left(1-\frac{2}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+1}\right)$$

Comme on a $|2\mathrm{i}x| < \mathrm{R}$, il vient

$$\tan(x) = \mathrm{i}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (2\mathrm{i})^n x^n$$

Par imparité de tan, on a $a_{2n} = 0$ et on conclut

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\mathrm{R}}{2}\,;\frac{\mathrm{R}}{2}\right[\qquad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} 2^{2n+1} a_{2n+1} x^{2n+1}}$$

Exercice 4 (**)

Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et $r \in \left]0\,;\mathrm{R}\right[$. On note $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.

1. Montrer $\qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad 2\pi r^k a_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\theta$

2. On suppose $\mathrm{R} = +\infty$ et f bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Corrigé : 1. Soit k entier et $\theta \in [0\,;2\pi]$. On a

$$f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}$$

Notons $\qquad \forall (n,\theta) \in \mathbb{N} \times [0\,;2\pi] \qquad u_n(\theta) = a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}$

On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_\infty = |a_n|\, r^n$

et $\sum |a_n|\, r^n$ converge absolument puisque $r < \mathrm{R}$. On en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum u_n$ d'où, en intégrant terme à terme

$$\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta}_{=2\pi\delta_{n,k}}$$

Ainsi $\qquad \boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad 2\pi r^k a_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\theta}$

2. Soit $\mathrm{M} \geqslant 0$ tel que $|f(z)| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Par inégalité triangulaire, il vient pour k entier non nul et $r > 0$

$$2\pi r^k |a_k| \leqslant \int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\right|\,\mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \mathrm{M}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{M}$$

D'où $$\forall r > 0 \qquad |a_k| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{r^k}$$

Faisant tendre $r \to +\infty$, on en déduit $\dfrac{\mathrm{M}}{r^k} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$ et d'où $a_k = 0$ pour k entier non nul. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est constante.}}$$

Remarque : Ce résultat s'intitule *théorème de Liouville.*

Exercice 5 (***)

Une *involution* sur un ensemble E est une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}$. Pour n entier, on note I_n le nombre d'involutions de $[\![1 ; n]\!]$. On fixe $\mathrm{I}_0 = 1$ par convention.

1. Préciser I_1, I_2 puis montrer
$$\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$$
2. Montrer que la série $\sum \dfrac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note S sa somme sur $]-1;1[$.
3. Établir $\qquad \forall x \in]-1;1[\qquad \mathrm{S}'(x) = (1+x)\mathrm{S}(x)$
4. En déduire une expression de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in]-1;1[$ puis une expression de I_n pour n entier.

Corrigé : 1. On a sans difficulté $\mathrm{I}_1 = 1$ et $\mathrm{I}_2 = 2$. Soit $n \geqslant 2$. Notons J_n l'ensemble des involutions de $[\![1 ; n]\!]$. On a

$$\mathrm{J}_n = \{\sigma \in \mathrm{J}_n \mid \sigma(n) = n\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \{\sigma \in \mathrm{J}_n \mid \sigma(n) = i\}$$

Il s'agit d'unions disjointes. Une involution de $[\![1 ; n]\!]$ qui fixe n est en bijection avec une involution de $[\![1 ; n-1]\!]$. Ainsi

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Card}\, \{\sigma \in \mathrm{J}_n \mid \sigma(n) = i\}$$

Enfin, une involution de $[\![1 ; n]\!]$ qui envoie n sur $i \neq n$ envoie également i sur n, les autres images étant non contraintes. Ainsi, une telle involution est en bijection avec une involution de $[\![1 ; n-2]\!]$. Finalement

$$\boxed{\mathrm{I}_1 = 1,\ \mathrm{I}_2 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + (n-1)\mathrm{I}_{n-2}}$$

2. On a $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{J}_n \subset \mathrm{S}_n$$

d'où $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n \leqslant n!$$

Ainsi $$\boxed{\text{La série entière } \sum \frac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n \text{ a un rayon de convergence } \mathrm{R} \geqslant 1.}$$

3. On a $$\forall x \in]-1;1[\qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n$$

Par dérivation de série entière, on trouve

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{(n-1)!} x^{n-1}$$

Par linéarité du symbole somme, on a pour $x \in \left]-1\,;1\right[$

$$(1+x)\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n + n\mathrm{I}_{n-1}}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{n!} x^n$$

Après changement d'indice, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(x) = (1+x)\mathrm{S}(x)}$$

4. La fonction S est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} f' = (1+x)f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Après résolution et par unicité du théorème de Cauchy linéaire, on obtient

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

Avec le développement en série entière de l'exponentielle et le théorème du produit de Cauchy, on obtient après calcul

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \frac{(2k)!}{2^k k!} \binom{n}{2k}}$$

Exercice 6 (****)

Pour $y \in \left]-1\,;1\right[$ et x réel, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} y^n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y\sin(x)}{1-y\cos(x)}\right)$$

Peut-on prolonger l'égalité pour $y \in [-1\,;1]$?

Corrigé : Soit x réel et n entier non nul. On a

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \left|\frac{\sin(nx)}{n} y^n\right| \leqslant |y|^n$$

Ainsi, la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\sin(nx)}{n} y^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On pose

$$\forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} y^n$$

Par dérivation d'une série entière, on a

$$\forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{\sin(nx)y^n}{n}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx)\, y^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)x)\, y^n$$

La série $\sum \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} y^n$ converge absolument pour $|y| < 1$. Par suite

$$\forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(y) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} y^n\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right)$$

On multiplie par l'expression conjuguée et on isole la partie imaginaire pour obtenir

$$\forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(y) = \frac{\sin(x)}{(1-y\cos(x))^2 + (y\sin(x))^2}$$

Posons $\qquad \forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{T}(y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y\sin(x)}{1-y\cos(x)}\right)$

On a $\mathrm{T} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ d'après les théorèmes généraux et par dérivation

$$\forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{T}'(y) = \sin(x)\frac{1-y\cos(x)+\cos(x)y}{(1-y\cos(x))^2}\frac{1}{1+\left(\dfrac{y\sin(x)}{1-y\cos(x)}\right)^2}$$
$$= \frac{\sin(x)}{(1-y\cos(x))^2+(y\sin(x))^2}$$

Ainsi $\qquad \forall y \in \left]-1\,;1\right[\qquad (\mathrm{S}-\mathrm{T})'(y) = 0 \quad \text{et} \quad (\mathrm{S}-\mathrm{T})(0) = 0$

La fonction $\mathrm{S}-\mathrm{T}$ est donc nulle sur l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$ et on conclut

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\left]-1\,;1\right[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)y^n}{n} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y\sin(x)}{1-y\cos(x)}\right)}$$

Pour $x \in \pi\mathbb{Z}$ et $y \in \{-1,1\}$, le dénominateur du membre de droite de l'égalité précédente s'annule. Supposons $x \in \mathbb{R}\smallsetminus\pi\mathbb{Z}$. On pose

$$\forall (n,y) \in \mathbb{N}\times[-1\,;1] \qquad u_n(y) = \frac{\sin(nx)}{n}y^n$$

On va montrer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $[-1\,;1]$. On pose

$$\forall (n,y) \in \mathbb{N}^*\times[-1\,;1] \qquad \mathrm{A}_n(y) = \sum_{k=0}^{n}\sin(kx)y^k$$

Soit n entier et $y \in [-1\,;1]$. On a

$$\mathrm{A}_n(y) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^k\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1-(y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^{n+1}}{1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right)$$

D'où $\qquad |\mathrm{A}_n(y)| \leqslant \left|\dfrac{1-(y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^{n+1}}{1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right| \leqslant \dfrac{2}{|1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|}$

et $\qquad \left|1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right|^2 = (1-y\cos(x))^2+(y\sin(x))^2 \geqslant \sin^2 x$

Ainsi $\qquad \forall (n,y) \in \mathbb{N}\times[-1\,;1] \qquad |\mathrm{A}_n(y)| \leqslant \dfrac{2}{|\sin(x)|}$

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Par transformation d'Abel, il vient

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(y) = \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\left[\mathrm{A}_k(y)-\mathrm{A}_{k-1}(y)\right]$$
$$= \frac{\mathrm{A}_{n+p}(y)}{n+p} - \frac{\mathrm{A}_n(y)}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}\mathrm{A}_k(y)\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]$$
$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(y) = \frac{\mathrm{A}_{n+p}(y)}{n+p} - \frac{\mathrm{A}_n(y)}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}\frac{\mathrm{A}_k(y)}{k(k+1)}$$

Par suite, on obtient

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(y)\right| \leqslant \frac{2}{|\sin(x)|}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+p}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

Faisant tendre $p \to +\infty$, notant $\mathrm{R}_n(y)$ le reste d'ordre n de la série $\sum u_n(y)$, il vient

$$|\mathrm{R}_n(y)| \leqslant \frac{2}{|\sin(x)|}\left(\frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}\right)$$

On en déduit $$\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[-1;1]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi, la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[-1;1]$. Par conséquent, la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $[-1;1]$ et la fonction T se prolonge par continuité en 1 et -1. On conclut

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z} \times [-1;1] \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} y^n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y\sin(x)}{1-y\cos(x)}\right)}$$

Remarque : On peut aussi prolonger l'égalité pour $(x,y) \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z} \times]-1;1]$ ou pour $(x,y) \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi(2\mathbb{Z}+1) \times [-1;1[$. Par exemple pour $x \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z}$, n entier et $y \in]-1;1]$, on a

$$|\mathrm{A}_n(y)| \leqslant \frac{2}{|1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|} \leqslant \frac{2}{\mathrm{C}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} = \operatorname*{Inf}_{y\in]-1;1]} \left|1-y\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right| > 0$$

et on poursuit comme précédemment. Ainsi, pour $y = 1$ et $x \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z}$, on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\right) = \mathrm{Arctan}\tan\left(\frac{\pi - x}{2}\right)$$

En particulier $$\forall x \in]0;2\pi[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$

Ce résultat est un classique de la théorie des séries de Fourier (hors programme...)