Feuille d'exercices n°49

Exercice 1 (*)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \mathrm{Arctan}\,(n) z^n$
2. $\sum \mathrm{e}^{(-1)^n} z^n$
3. $\sum \sqrt{n} z^n$
4. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \ln(n) z^n$
5. $\sum \ln(1 - \mathrm{e}^{-n}) z^n$
6. $\sum \ln(\mathrm{sh}\,(n)) z^n$

Exercice 2 (**)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) z^n$
2. $\sum \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right) z^n$
3. $\sum \ln(n!) z^n$
4. $\sum \mathrm{e}^{-n} z^{n^2}$
5. $\sum \dfrac{z^{n^2}}{n!}$
6. $\sum \binom{2n}{n} z^{2n}$

Exercice 3 (*)

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum \dfrac{x^n}{n+1}$
2. $\sum n x^{2n}$
3. $\sum \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right) x^n$

Exercice 4 (**)

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum \mathrm{ch}\,(n) x^n$
2. $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{x^n}{n^2-1}$
3. $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$
4. $\sum \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) x^n$

Exercice 5 (*)

Justifier que les fonctions suivantes se prolongent se prolongent en fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$:

1. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$
2. $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$
3. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{th}\,(x)}{x}$

Exercice 6 (**)

Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser les rayons de convergence :

1. $x \mapsto \cos(x)\cos(2x)$
2. $x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$
3. $x \mapsto \sin(x)\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}$

Exercice 7 (**)

Montrer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \mathrm{Arctan}\,(t)\,\mathrm{d}t$$
En déduire la valeur de cette somme.

Exercice 8 (**)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{n!}$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n\, x^n$. On pourra déterminer un encadrement simple de a_n.

   Par la suite, on note $\forall x \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$

2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire (L) d'ordre un.
3. En déduire une écriture intégrale de f.

Exercice 9 (**)

On pose $$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}_{n,k} = \mathrm{Card}\left\{(i_1,\ldots,i_n) \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{j=1}^{n} i_j = k\right\}$$

1. Préciser $\mathrm{S}_{1,k}$ puis justifier $\qquad \mathrm{S}_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{S}_{n-1,k-i}$
2. Déterminer un majorant simple de $\mathrm{S}_{n,k}$ et en déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{S}_{n,k}\, x^k$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{S}_{1,k}\, x^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{S}_{2,k}\, x^k$ puis conjecturer une formule pour $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{S}_{n,k}\, x^k$ que l'on démontrera.
4. En déduire une expression de $\mathrm{S}_{n,k}$.

Exercice 10 (**)

On pose $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
2. En déduire le développement en série entière de f.
3. Établir $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$