ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°50

Exercice 1 (**)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum n e^{(-1)^n} z^n$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^{\ln(n)} z^n$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$
4. $\sum \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}\right) z^n$
5. $\sum \left(\displaystyle\int_0^1 (1+t^2)^n \,\mathrm{d}t\right) z^n$
6. $\sum 2^n z^{n^2}$

Exercice 2 (**)

Soit f développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $(x_n)_n \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ vérifiant $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $f(x_n) = 0$ pour tout n entier. Montrer que f est nulle.

Exercice 3 (**)

Montrer les égalités :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th}(t))\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

Exercice 4 (***)

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$. On note S sa somme.
2. Déterminer de deux manière différentes $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{S}(x)$.
3. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to 1$.

Exercice 5 (***)

Déterminer le rayon de convergence puis la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum \dfrac{x^n}{2n+1}$
2. $\sum \dfrac{x^{3n}}{(2n)!}$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(n)}{n} x^n$

Exercice 6 (***)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \,\mathrm{d}t$$

Déterminer le rayon de convergence puis la somme de $\sum \mathrm{W}_n x^n$.

Exercice 7 (**)

Soit n entier. Un *dérangement* est une permutation de $[\![1 ; n]\!]$ sans point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de $[\![1 ; n]\!]$ avec $\mathrm{D}_0 = 1$ pour convention.

1. Justifier $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{D}_{n-k}$$
2. Montrer que le rayon de convergence n'est pas nul puis déterminer la somme de la série entière $\sum \dfrac{\mathrm{D}_n}{n!} x^n$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathrm{D}_n}{n!}$.

Exercice 8 (***)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières :

1. $\sum a_n^2 z^n$
2. $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$
3. $\sum \dfrac{n!\, a_n}{n^n} z^n$

Exercice 9 (***)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer $$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{e}^{z}$$

Exercice 10 (***)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence puis la somme de la série entière $\sum \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^n) z^n$ en fonction de χ_{A}.

Exercice 11 (***)

Déterminer le rayon puis un équivalent en 1 de la somme de la série entière $\sum x^{n^2}$.