ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°51

Exercice 1 (**)

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$.
2. Montrer que la suite $\left(\ln(n) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
3. En déduire un équivalent de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$ pour $x \to 1^-$.

Indications : 1. Procéder par encadrement.
2. Utiliser le théorème de comparaison série/intégrale.
3. Pour $x \in [\,0\,;1\,[$, majorer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\ln(n) - \mathrm{H}_n)x^n$ avec $\mathrm{H}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ pour n entier non nul puis décomposer $\ln(n)$ en $\ln(n) - \mathrm{H}_n + \mathrm{H}_n$ dans la somme à étudier.

Exercice 2 (**)

Soit $(a_n)_n$ suite non nulle T-périodique avec T entier non nul.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Déterminer sa somme S sur l'intervalle ouvert de convergence.

Indications : 1. Observer que $(a_n)_n$ est bornée puis considérer une suite extraite bien choisie.
2. Pour N entier et $x \in \,]-1\,;1\,[$, écrire la somme partielle $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{NT}-1} a_n x^n$ puis la réorganiser.

Exercice 3 (***)

Soit $(a_n)_n$ la suite réelle définie par $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = 0$$

1. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ vérifie $\mathrm{R} \geqslant 1$.
2. Montrer $\qquad \forall z \in \mathrm{D}(0, \mathrm{R}) \qquad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{\,z} + 1}$
3. En déduire l'expression du développement en série entière de la fonction tan sur $\left]-\dfrac{\mathrm{R}}{2}\,;\dfrac{\mathrm{R}}{2}\right[$.

Indications : 1. Majorer $(|a_n|)_n$ par récurrence forte. On pourra utiliser le fait que $\mathrm{e} - 1 \leqslant 2$.
2. Distribuer $(1 + \mathrm{e}^{\,z})\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ puis faire apparaître un produit de Cauchy.
3. Pour $x \in \left]-\dfrac{\mathrm{R}}{2}\,;\dfrac{\mathrm{R}}{2}\right[$, écrire $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ puis utiliser les formules d'Euler et le résultat de la question précédente.

Exercice 4 (**)

Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et $r \in \left]0\,;\mathrm{R}\right[$. On note $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $z \in \mathrm{D}(0,\mathrm{R})$.

1. Montrer $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad 2\pi r^k a_k = \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
2. On suppose $\mathrm{R} = +\infty$ et f bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Indications : 1. Établir une convergence normale.
2. Pour k entier non nul, majorer $|a_k|$ à l'aide de l'égalité précédente.

Exercice 5 (***)

Une *involution* sur un ensemble E est une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}$. Pour n entier, on note I_n le nombre d'involutions de $[\![1\,;n]\!]$. On fixe $\mathrm{I}_0 = 1$ par convention.

1. Préciser I_1, I_2 puis montrer $$\forall n \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$$
2. Montrer que la série $\sum \dfrac{\mathrm{I}_n}{n!}x^n$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note S sa somme sur $\left]-1\,;1\right[$.
3. Établir $$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad \mathrm{S}'(x) = (1+x)\mathrm{S}(x)$$
4. En déduire une expression de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in \left]-1\,;1\right[$ puis une expression de I_n pour n entier.

Indications : 1. Considérer les involutions de $[\![1\,;n]\!]$ qui fixent n et les autres.
3. Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, calculer $(1+x)\mathrm{S}(x)$ en exploitant la relation de la première question.
4. Déterminer un système de Cauchy dont S est solution puis expliciter S. À l'aide d'un produit de Cauchy, déterminer le développement en série entière de la fonction S.

Exercice 6 (****)

Pour $y \in \left]-1\,;1\right[$ et x réel, établir
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} y^n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y\sin(x)}{1-y\cos(x)}\right)$$
Peut-on prolonger l'égalité pour $y \in [-1\,;1]$?

Indications : Justifier la dérivabilité des membres de l'égalité en tant que fonctions de y puis comparer les dérivées. Pour le prolongement sur $[-1\,;1]$, identifier les valeurs sensées de x pour un tel prolongement puis poser
$$\forall (n,y) \in \mathbb{N} \times [-1\,;1] \qquad \mathrm{A}_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) y^k$$
et réaliser une transformation d'Abel sur $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(y)$ avec $u_k(y) = \dfrac{\sin(kx)}{k} y^k$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $y \in [-1\,;1]$.