Feuille d'exercices n°40

Exercice 1 (*)

Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \,\mathrm{d}t$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t-\lfloor t\rfloor)^n \,\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t$

Corrigé : 1. On a

$$\forall t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \cos(t)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall (n,t) \in \mathbb{N}\times\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad 0 \leqslant \cos(t)^n \leqslant 1$$

avec $t \mapsto 1$ intégrable sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

2. On a
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad 0 \leqslant t-\lfloor t\rfloor < 1$$

puis
$$\forall t \geqslant 0 \qquad (t-\lfloor t\rfloor)^n\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant (t-\lfloor t\rfloor)^n\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = 1$. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (t-\lfloor t\rfloor)^n \,\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

3. L'intégrale est bien convergente pour $n=1$ (intégrale de Dirichlet). Une étude de fonction permet d'établir

$$\forall t > 0 \qquad \sin(t) < t$$

d'où
$$\forall t \in \,]\,0\,;\pi\,[\qquad |\sin(t)| = \sin(t) < t \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant \pi \qquad \sin(t) \leqslant 1 < \pi \leqslant t$$

Par suite

$$\forall t > 0 \qquad \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2 \qquad \forall t > 0 \qquad 0 \leqslant \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|^n \leqslant \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$$

avec $\varphi : t \mapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$ intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ car φ est prolongeable par continuité en 0 et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 2 (*)

Déterminer un équivalent des suites de terme général :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$ 2. $\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$ 3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$

Corrigé : 1. Pour n entier non nul, le changement de variable $u = t^n$ donne

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u^{\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u$$

Puis $\forall u \in \,]\,0\,;1\,]\quad \dfrac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u^{\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2}$ et $\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;1\,]\quad 0 \leqslant \dfrac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u^{\frac{1}{n}}} \leqslant 1$

Par convergence dominée, il vient

$$\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u^{\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}$$

On conclut $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}$

2. Soit n entier non nul. Avec les changements de variables successifs $u = t-1$ puis $v = nu$, il vient

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n}} \ln(1+(1+u)^n)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+\left(1+\frac{v}{n}\right)^n\right)\,\mathrm{d}v$$

Puis

$$\forall v \in [\,0\,;1\,]\qquad \ln\left(1+\left(1+\frac{v}{n}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\left(1+\mathrm{e}^v\right)$$

et $\forall (n,v) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;1\,]\qquad 0 \leqslant \ln\left(1+\left(1+\dfrac{v}{n}\right)^n\right) \leqslant \ln(1+\mathrm{e}^v) \leqslant \ln(1+\mathrm{e}\,)$

la domination résultant de l'inégalité de convexité $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x > -1$. La dominante étant clairement intégrable sur $[\,0\,;1\,]$, il s'ensuit

$$\int_0^1 \ln\left(1+\left(1+\frac{v}{n}\right)^n\right)\,\mathrm{d}v \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \ln\left(1+\mathrm{e}^v\right)\,\mathrm{d}v$$

On conclut $\boxed{\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+\mathrm{e}^v)\,\mathrm{d}v}$

3. Soit n entier non nul. On pose $u = t^n$. On trouve

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

On a $\forall u \geqslant 1\qquad \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$ et $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} u^{\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{e}^{-u}$

La dominante $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ est continue sur $[\,1\,;+\infty\,[$ avec $\mathrm{e}^{-u} \underset{u\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ d'où son intégrabilité par comparaison et critère de Riemann. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u}$$

Exercice 3 (**)

Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $(-1)^n \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^{n+1}}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$

Corrigé : 1. On pose $\quad \forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,1\,;+\infty\,[\qquad f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t)t^{n+1}}$

Pour n entier, on a $f_n \in \mathscr{C}_{pm}([\,1\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ avec $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Puis

$$\forall t > 1 \qquad \frac{1}{(1+t)t^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall (n,t) \in \mathbb{N} \times]\,2\,;+\infty\,[\qquad 0 \leqslant \frac{1}{(1+t)t^{n+1}} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

La dominante $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $]\,1\,;+\infty\,[$ et par convergence dominée

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

La suite $(f_n)_n$ est clairement décroissante d'où la décroissance de la suite des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ par croissance de l'intégrale. D'après le théorème des séries alternées, on conclut

$$\boxed{\text{La série de terme général } (-1)^n \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)t^{n+1}} \text{ converge.}}$$

2. On pose $\qquad \forall (n,t) \in \mathbb{N} \times]\,0\,;1\,] \qquad f_n(t) = \dfrac{t^n \ln(t)}{1+t}$

Pour n entier, on a $f_n \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$ avec $f_n(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ d'où son intégrabilité sur $]\,0\,;1\,]$.

On peut montrer par convergence dominée que $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mais ça ne suffit pas pour conclure. Pour n entier non nul, le changement de variable $u = t^n$ donne

$$\int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{\ln u}{1+u^{\frac{1}{n}}} u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

Puis

$$\forall u \in]\,0\,;1\,] \qquad \frac{\ln u}{1+u^{\frac{1}{n}}} u^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\ln u}{2} \quad \text{et} \quad \forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \left| \frac{\ln u}{1+u^{\frac{1}{n}}} u^{\frac{1}{n}} \right| \leqslant -\ln u$$

La dominante $u \mapsto -\ln u$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ puisque $\ln(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Par convergence dominée, il vient

$$\int_0^1 \frac{\ln u}{1+u^{\frac{1}{n}}} u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\int_0^1 \ln u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On conclut

$$\boxed{\text{La série de terme général } \int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Exercice 4 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ avec $f(1) \neq 0$.

Déterminer un équivalent simple pour $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : Soit n entier non nul. On pose $u = t^n$. On a

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 f(u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

Puis $\qquad \forall u \in \,]\,0\,;1\,] \qquad f(u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(1) \quad \text{et} \quad \left|f(u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}}\right| \leqslant \|f\|_\infty$

La dominante $v \mapsto \|f\|_\infty$ est clairement intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et par convergence dominée, il vient

$$\int_0^1 f(u^{\frac{1}{n}})u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(1)\,\mathrm{d}u = f(1) \neq 0$$

Ainsi $$\boxed{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}}$$

Exercice 5 (**)

Déterminer les limites de la suite de terme général :

1. $\displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^n (k+t)}\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n + \mathrm{e}^t}$

Corrigé : 1. On pose

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \forall n \geqslant 1 \qquad f_n(t) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t} & \text{si } t \in [\,0\,;n\,] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Pour $t \geqslant 0$, on a $t \in [\,0\,;n\,]$ pour n assez grand et avec l'inégalité de concavité $\ln(1+u) \leqslant u$ pour $u \geqslant 0$

$$f_n(t) = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)}\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{t+\mathrm{o}(1)}\mathrm{e}^{-2t} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-t}$$

avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, par convergence dominée

$$\boxed{\int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1}$$

2. On pose $\qquad \forall t \geqslant 0 \qquad \forall n \geqslant 2 \qquad f_n(t) = \dfrac{n!}{\prod\limits_{k=1}^n (t+k)}$

Pour $n \geqslant 2$, on a $\qquad \forall t \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \dfrac{1\times 2}{(t+1)(t+2)}$

qui fournit une dominante intégrable indépendante de n. Puis on écrit

$$\forall t > 0 \qquad f_n(t) = \exp\left(-\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{t}{k}\right)\right)$$

Or $$\forall t > 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{t}{k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

puisqu'il s'agit d'une somme partielle de série positive divergente avec $\ln\left(1+\dfrac{t}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{t}{k}$. On en déduit $f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $t > 0$ et par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

3\. On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^n + \mathrm{e}^t} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n + \mathrm{e}^t}$$

On a $$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad \frac{1}{t^n+\mathrm{e}^t} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{1}{t^n+\mathrm{e}^t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

puis $$\forall t > 1 \qquad \frac{1}{t^n+\mathrm{e}^t} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{1}{t^n+\mathrm{e}^t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

Comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[\,0\,;1\,[$ et sur $]\,1\,;+\infty\,[$, par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n+\mathrm{e}^t} = \mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 6 (**)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$$

Déterminer un développement asymptotique de I_n pour $n \to +\infty$ à une précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Corrigé : Pour $t \in [\,0\,;1\,[$, on a

$$\frac{1}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \frac{1}{1+t^n} \leqslant 1$$

avec $t \mapsto 1$ intégrable sur $[\,0\,;1\,[$. Par convergence dominée, il vient

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$$

Puis $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n - 1 = -\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

Pour n entier non nul, on pose $u = t^n$. Il vient

$$\mathrm{I}_n - 1 = -\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

Pour $u \in \,]\,0\,;1\,]$, on a

$$\frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+u} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u} \leqslant 1$$

Comme $v \mapsto 1$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$, il vient par convergence dominée

$$n(\mathrm{I}_n - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = -\ln(2)$$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{I}_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Variante : On peut aussi réaliser une intégration par parties sur $\mathrm{I}_n - 1$ avec n entier non nul. On a

$$\mathrm{I}_n - 1 = -\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t^n} t \,\mathrm{d}t = -\left[\frac{t}{n}\ln(1+t^n)\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

Avec l'inégalité de concavité $\ln(1+u) \leqslant u$ pour $u > -1$, on établit que l'intégrale est de limite nulle et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 7 (**)

1. Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$

2. On rappelle $\qquad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

   En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. On pose $u = \cos(t)$ puis $u = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$ et on obtient

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(t)^2)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t}$$

2. On pose $\qquad \forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0\,;\sqrt{n}]}(t)$

On a pour $t \geqslant 0 \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-t^2} \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$

d'après l'inégalité de concavité $\ln(1-u) \leqslant -u$ pour $u \in [0\,;1[$. Comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ puisque $\mathrm{e}^{-t^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, on conclut par convergence dominée

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Avec l'équivalent
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Exercice 8 (*)

Montrer que $$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

On rappelle l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Corrigé : On a $$\forall t > 0 \qquad \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}} = \sqrt{t}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t}$$

Posons $$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times \left]\,0\,;+\infty\,\right[\qquad f_n(t) = \sqrt{t}\mathrm{e}^{-(n+1)t}$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et intégrables sur cet intervalle puisque $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t - 1}$ continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Puis, le changement de variable $u = (n+1)t$ donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{+\infty} \sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

d'où la convergence de la série $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$. Le changement $u = v^2$ puis une intégration par parties donne

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} v^2\mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \left[-v\mathrm{e}^{-v^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v$$

Par intégration terme à terme, on conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}$$

Exercice 9 (*)

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

Corrigé : Supposons la série convergente. D'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+t^3}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$$

Cette intégrale étant clairement divergente, on en déduit que l'hypothèse est fausse et on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \text{ diverge.}}$$

Exercice 10 (*)

Montrer que $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : On a $\qquad \forall t \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \dfrac{\ln(t)}{t-1} = -\ln(t)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$

Pour n entier, on a $t \mapsto t^n \ln(t) \in \mathscr{C}(]\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$ avec $t^n \ln(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées d'où son intégrabilité et en intégrant par parties, tous les crochets sont finis, nuls et on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}\ln(t)}{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

Comme $\sum \displaystyle\int_0^1 |t^n \ln(t)|\,\mathrm{d}t = \sum \dfrac{1}{(n+1)^2}$ converge par critère de Riemann, on conclut en intégrant terme à terme

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} -t^n \ln(t)\right)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 -t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}}$$