Feuille d'exercices n°41

Exercice 1 (***)

Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \ln(t)\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : On pose

$$\forall (n,t)\in\mathbb{N}^*\times\,]\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(t)=\ln(t)\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}\mathbb{1}_{[\,0\,;n\,]}(t)$$

On a
$$\forall t>0\qquad f_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}$$

L'inégalité classique de concavité $\ln(1+u)\leqslant u$ pour $u>-1$ ne permet pas d'établir une domination. En développant le binôme, on observe

$$\forall n\geqslant 2\qquad \forall t>0\qquad \left(1+\frac{t}{n}\right)^n\geqslant 1+\frac{n-1}{n}\frac{t^2}{2}\geqslant 1+\frac{t^2}{4}$$

d'où
$$\forall n\geqslant 2\qquad \forall t>0\qquad |f_n(t)|\leqslant\varphi(t)\quad\text{avec}\quad \varphi(t)=\frac{|\ln(t)|}{1+t^2/4}$$

La dominante φ est continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$ avec $\varphi(t)\underset{t\to0}{=}\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ d'où son intégrabilité sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^n \ln(t)\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^{+\infty}\ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 2 (***)

On pose
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t+\ldots+t^{n-1}}$$

Déterminer un développement asymptotique à trois termes de u_n par rapport à $\dfrac{1}{n}$ pour $n\to+\infty$.

Corrigé : Soit n entier non nul. L'intégrale définissant u_n est bien définie en tant qu'intégrale de fonction continue sur un segment. On observe l'égalité avec l'intégrale faussement impropre en 1

$$u_n=\int_0^1\frac{1-t}{1-t^n}\,\mathrm{d}t$$

On a
$$\forall t\in[\,0\,;1\,[\qquad \frac{1-t}{1-t^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1-t\quad\text{et}\quad 0\leqslant\frac{1}{1+t+\ldots+t^{n-1}}\leqslant 1$$

La dominante $t\mapsto 1$ étant clairement intégrable sur $[\,0\,;1\,[$, il vient par convergence dominée

$$u_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^1(1-t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

Puis, il vient par linéarité de l'intégrale

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1-t^n} - (1-t) \right) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{1-t^n} \,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = t^n$ donne

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{1-u^{\frac{1}{n}}}{1-u} u^{\frac{1}{n}} \,\mathrm{d}u$$

Avec le développement asymptotique $1 - u^{\frac{1}{n}} = 1 - \mathrm{e}^{\frac{\ln(u)}{n}} = -\dfrac{\ln(u)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, il vient

$$\forall u \in \left]\,0\,;1\,\right[\qquad \frac{n(1-u^{\frac{1}{n}})}{1-u} u^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{\ln(u)}{1-u}$$

et avec l'inégalité de convexité $1 - \mathrm{e}^x \leqslant -x$ pour x réel

$$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times \left]\,0\,;1\,\right[\qquad 0 \leqslant \frac{n(1-u^{\frac{1}{n}})}{1-u} u^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{-\ln(u)}{1-u}$$

La dominante $u \mapsto \dfrac{-\ln(u)}{1-u}$ est prolongeable par continuité en 0 et 1 et donc intégrable sur $\left]\,0\,;1\,\right[$. Par convergence dominée, il vient

$$\int_0^1 \frac{n(1-u^{\frac{1}{n}})}{1-u} u^{\frac{1}{n}} \,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{-\ln(u)}{1-u} \,\mathrm{d}u$$

Ainsi
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{-\ln(u)}{1-u} \,\mathrm{d}u + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Remarque : En justifiant la permutation des symboles, on peut établir

$$\int_0^1 \frac{-\ln(u)}{1-u} \,\mathrm{d}u = \int_0^1 -\ln(u) \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 -\ln(u) u^n \,\mathrm{d}u = \zeta(2)$$

Variante : Soit n entier non nul. On a

$$u_n = \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^n} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t) \sum_{k=0}^{+\infty} t^{kn} \,\mathrm{d}t$$

On pose
$$\forall (k,t) \in \mathbb{N} \times \left[\,0\,;1\,\right[\qquad f_k(t) = (1-t)t^{kn}$$

Pour k entier, on a f_k intégrable sur $\left[\,0\,;1\,\right[$ car prolongeable par continuité sur le segment $[\,0\,;1\,]$ puis $\sum f_k$ converge simplement sur $\left[\,0\,;1\,\right[$ avec $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k$ continue par morceaux sur $\left[\,0\,;1\,\right[$ puisque c'est précisément l'intégrande $t \mapsto \dfrac{1-t}{1-t^n}$. Enfin, on a

$$\sum \int_0^1 |f_k(t)| \,\mathrm{d}t = \sum \int_0^1 (1-t)t^{kn} \,\mathrm{d}t = \sum \left[\frac{1}{kn+1} - \frac{1}{kn+2} \right] = \sum \frac{1}{(kn+1)(kn+2)}$$

série convergente puisque $\dfrac{1}{(kn+1)(kn+2)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. Ainsi, par intégration terme à terme, on trouve

$$u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(t) \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(kn+1)(kn+2)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(kn+1)(kn+2)}$$

On pose
$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad v_k(n) = \frac{n^2}{(kn+1)(kn+2)}$$

On a $\qquad \forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad 0 \leqslant v_k(n) \leqslant \dfrac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{k^2}$

Par conséquent, la série $\sum v_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{N}^*$ et par double limite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} v_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} v_k(n) = \zeta(2)$$

Et on retrouve $\qquad u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(n) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n^2}\left(\zeta(2) + \mathrm{o}(1)\right)$

Exercice 3 (***)

Déterminer $\qquad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \cos\left(\frac{t}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}t$

Corrigé : On pose

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(t) = \cos\left(\frac{t}{n}\right)^{n^2} \mathbb{1}_{[0\,;n]}(t)$$

On admet que $[0\,;1] \subset \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ce qui justifie que f_n est à valeurs dans $]0\,;+\infty[$. Soit $t \geqslant 0$. Pour $n \geqslant t$, on a

$$f_n(t) = \mathrm{e}^{n^2 \ln\cos\left(\frac{t}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n^2 \ln\left(1 - \frac{t^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2} + \mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

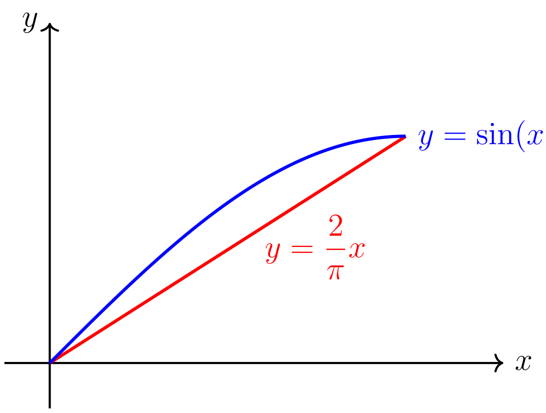
Il faut ensuit majorer un peu finement le cos. Par concavité et position graphe/corde, on a

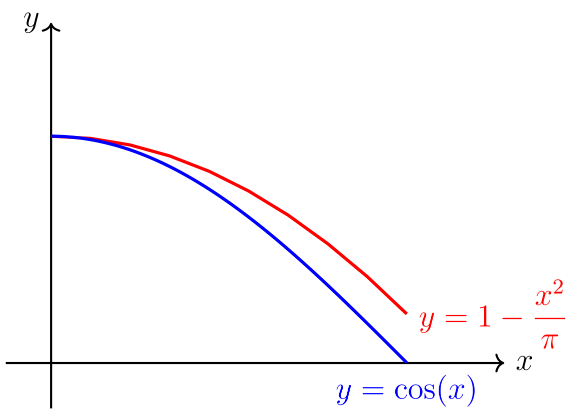
$$\forall u \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \sin(u) \geqslant \frac{2}{\pi} u$$

et après intégration

$$\forall u \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \int_0^u \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \cos(u) \geqslant \int_0^u \frac{2}{\pi} t\,\mathrm{d}t = \frac{u^2}{\pi}$$

autrement dit $\qquad \forall u \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \qquad 1 - \dfrac{u^2}{\pi} \geqslant \cos(u)$





Il s'ensuit, en combinant l'inégalité précédente avec l'inégalité de concavité $\ln(1-u) \leqslant -u$ pour $u < 1$

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \in \mathbb{R}_+ \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \mathrm{e}^{n^2 \ln\left(1-\frac{t^2}{\pi n^2}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\pi}}$$

l'inégalité étant trivialement réalisée pour $t > n$. La dominante $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\pi}}$ est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ avec $\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\pi}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi, par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_0^n \cos\left(\frac{t}{n}\right)^{n^2} \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t}$$

Remarque : On peut aussi procéder avec l'inégalité de Taylor-Lagrange en utilisant

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \cos(t) - 1 + \frac{t^2}{2} \leqslant \frac{t^4}{4!}$$

Ainsi, pour n entier non nul et $t \in [\,0\,;n\,]$

$$\begin{aligned} n^2 \ln\cos\left(\frac{t}{n}\right) &\leqslant n^2\left(\cos\left(\frac{t}{n}\right) - 1\right) \\ &\leqslant -\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!n^2} \leqslant -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{4!} \end{aligned}$$

ce qui fournit ensuite une dominante intégrable.

Exercice 4 (**)

Soit $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;+\infty\,[$. On pose

$$u_n(x) = \frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x+k)} \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{I}_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

1. Justifier que $\Gamma(x)$ est bien définie pour $x > 0$.
2. Montrer $\qquad \forall x > 0 \qquad \mathrm{I}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(x)$
3. En déduire un équivalent simple de $u_n(x)$ pour $x > 0$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. Soit $x > 0$. On a $f : t \mapsto t^x\mathrm{e}^{-t} \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ avec

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{1-x}}\right) \quad \text{et} \quad f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Ainsi, la fonction f intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ et $[\,1\,;+\infty\,[$ d'où

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est bien définie sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. On pose $\qquad \forall (t,n) \in \,]\,0\,;+\infty\,[\, \times \mathbb{N}^* \qquad f_n(t) = t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{]\,0\,;n\,[}(t)$

Clairement $\qquad \forall t > 0 \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$

Avec l'inégalité classique $\ln(1+u) \leqslant u$ pour $u > -1$, on obtient

$$\forall (t,n) \in \,]\,0\,;+\infty\,[\, \times \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant f_n(t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}\mathbb{1}_{]\,0\,;n\,[}(t) \leqslant t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$$

Par convergence dominée $\qquad \boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{I}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(x)}$

3. Avec le changement de variables $t = nu$, on obtient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{I}_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n \,\mathrm{d}u$$

Après n intégrations par parties, il vient

$$\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n = \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(x+k)} \int_0^1 u^{x+n-1}\,\mathrm{d}u = \frac{u_n(x)}{x}$$

Par conséquent $$\boxed{\forall x > 0 \qquad u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x\Gamma(x)}{n^x}}$$

Exercice 5 (**)

Montrer $$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2+1)}$$

Corrigé : On a

$$\forall t > 0 \qquad \frac{1-\cos(t)}{\mathrm{e}^t-1} = \frac{(1-\cos(t))\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = (1-\cos(t))\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t}$$

Posons $$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(t) = (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-(n+1)t}$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et intégrables sur cet intervalle car prolongeables par continuité en 0 et $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{\mathrm{e}^t-1}$ continue par morceaux sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Puis, par linéarité car convergence des intégrales concernées, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))\mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t - \mathrm{Re}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} - \mathrm{Re}\,\frac{1}{n+1+\mathrm{i}} \\ \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{(n+1)((n+1)^2+1)}\end{aligned}$$

La série $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge clairement et par intégration terme à terme

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n^2+1)}}$$

Exercice 6 (***)

On pose $$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$$

1. Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, déterminer une expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ avec des factorielles.
2. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum \dfrac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

Corrigé : 1. En intégrant par parties (fonctions $\mathscr{C}^1$), il vient

$$\mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+1}(1-t)^q}{p+1}\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit $\qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p+1,q-1}$

Par une récurrence immédiate, on obtient

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \frac{q\times(q-1)\times\ldots\times 1}{(p+1)\times(p+2)\times\ldots\times(p+q)}\mathrm{I}_{p+q,0}$$

avec $\qquad \mathrm{I}_{p+q,0} = \displaystyle\int_0^1 t^{p+q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+q+1}$

puis $\qquad \mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{1\times\ldots\times(p-1)\times p\times q!}{1\times\ldots\times p\times(p+1)\times\ldots\times(p+q)}\mathrm{I}_{p+q,0} = \dfrac{p!\,q!}{(p+q)!}\dfrac{1}{(p+q+1)}$

D'où $\qquad \boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}}$

2. Notons $u_n = \mathrm{I}_{n,n}$ pour n entier. D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

et $\qquad \forall n\in\mathbb{N} \qquad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2n+3}\dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{4}$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge. On veut ensuite calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t$$

Comme $\sum t^n(1-t)^n$ converge pour tout $t\in[\,0\,;1\,]$ avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n(1-t)^n = \frac{1}{1-t(1-t)}$ et comme $\displaystyle\sum\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t$ converge, il vient d'après le théorème d'intégration terme à terme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty} t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1-t(1-t)}$$

Enfin, par les techniques habituelles de calcul intégral, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1-t(1-t)} &= \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(t-1/2)^2+3/4}\\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+3/4} = 2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+3/4} = 2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On conclut $\qquad \boxed{\text{La série } \sum\dfrac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \text{ converge et sa somme vaut } \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}.}$

Remarque : Pour n entier, avec l'égalité $u_n = \displaystyle\int_0^1 (t(1-t))^n\,\mathrm{d}t$, on peut observer

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{4^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4^n}$$

ce qui prouve la convergence de $\sum u_n$ par comparaison.

Exercice 7 (***)

On pose $\qquad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \qquad a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^p \cos(t)^n \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_p = \int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$

1. Justifier la convergence de l'intégrale définissant I_p pour p entier.
2. Établir
$$n^{\frac{p+1}{2}} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{I}_p$$

Corrigé : 1. Soit p entier. L'intégrande $t \mapsto t^p \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et par croissances comparées, on a $t^p \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison et critère de Riemann, on a

$$\boxed{\text{L'intégrale définissant } \mathrm{I}_p \text{ est convergente pour tout } p \text{ entier.}}$$

2. Avec le changement de variables $u = \sqrt{n}t$, il vient pour $(p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$

$$n^{\frac{p+1}{2}} a_n = \int_0^{+\infty} f_n(u) \, \mathrm{d}u \quad \text{avec} \quad \forall u \geqslant 0 \qquad f_n(u) = u^p \cos^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \mathbb{1}_{[\,0\,;\sqrt{n}\frac{\pi}{2}\,[}$$

On a $\forall u \geqslant 0 \qquad f_n(u) = u^p \mathrm{e}^{n \ln \cos\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)} = u^p \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{u^2}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = u^p \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2} + \mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} u^p \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$

Reste à établir une domination. Par convexité, on a $\ln x \leqslant x - 1$ pour $x > 0$ d'où

$$\forall u \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant f_n(u) \leqslant u^p \mathrm{e}^{-n\left(1 - \cos\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)} = u^p \mathrm{e}^{-2n \sin^2\left(\frac{u}{2\sqrt{n}}\right)}$$

Toujours par convexité, on a $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$ pour $x \in \left[\,0\,; \dfrac{\pi}{2}\,\right]$ d'où

$$\forall u \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant f_n(u) \leqslant u^p \mathrm{e}^{-2n\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{u^2}{4n}} = u^p \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi^2} u^2}$$

La dominante $u \mapsto u^p \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi^2} u^2}$ est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et $u^p \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi^2} u^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ ce qui prouve son intégrabilité. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{n^{\frac{p+1}{2}} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{I}_p}$$

Exercice 8 (****)

On pose $\qquad \forall n \geqslant 2 \qquad u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$

1. Justifier que la suite $(u_n)_n$ est bien définie puis déterminer un développement asymptotique à trois termes pour $n \to +\infty$.
2. Montrer la convergence de la série $\sum (u_n - 1)$ puis déterminer un équivalent simple de son reste d'ordre n.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall t \geqslant 0 \qquad \forall n \geqslant 2 \qquad f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^n}$

Pour $n \geqslant 2$, on a $f_n \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^n}$. Ainsi, d'après le critère de Riemann, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ce qui prouve que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ est bien définie.}}$$

Selon la position de t vis-à-vis de 1, la limite simple de $(f_n(t))_n$ n'est pas la même. D'après la relation de Chasles, on a

$$\forall n \geqslant 2 \qquad u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$$

On a $$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad \frac{1}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{1}{1+t^n} \leqslant 1$$

La fonction constante égale à 1 est intégrale sur l'intervalle $[\,0\,;1\,[$ d'où, par convergence dominée

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$$

Puis $$\forall t > 1 \qquad \frac{1}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \frac{1}{1+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

La dominante $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $]\,1\,;{+\infty}\,[$ d'où, par convergence dominée

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi $$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

On va donc s'intéresser au comportement asymptotique de la suite $(u_n - 1)_n$. Soit n entier non nul. Avec le changement de variable $u = 1/t$, on obtient

$$\forall n \geqslant 2 \qquad u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} + \int_0^1 \frac{u^{n-2}}{1+u^n}\,\mathrm{d}u$$

d'où $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} - 1 = \int_0^1 \frac{u^n(1-u^2)}{1+u^{n+2}}\,\mathrm{d}u$$

Avec le changement de variables $t = u^n$, on obtient

$$u_{n+2} - 1 = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1-t^{\frac{2}{n}}}{1+t^{1+\frac{2}{n}}}t^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{n\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln(t)}\right)}{1+t^{1+\frac{2}{n}}}t^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t$$

On a $$\forall t \in]\,0\,;1\,] \qquad \frac{n\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln(t)}\right)}{1+t^{1+\frac{2}{n}}}t^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{-2\ln(t)}{1+t}$$

On a $1 - \mathrm{e}^x \leqslant -x$ pour tout x réel par inégalité de concavité et par suite

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \forall t \in]\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant \frac{n\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln(t)}\right)}{1+t^{1+\frac{2}{n}}}t^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{-2\ln(t)}{1+t^2}$$

La dominante est continue sur $]\,0\,;1\,]$ et on a $\dfrac{-2\ln(t)}{1+t^2} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ d'où son intégrabilité. Par convergence dominée, il vient

$$n^2(u_{n+2}-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{-2\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{2}{n^2}\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

2. On a
$$u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la série $\sum(u_n - 1)$ converge. Puis, par sommation des relations de comparaison, comme
$$u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

il vient
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_n - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

et par comparaison série/intégrale, on trouve
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n}$$

On conclut
$$\boxed{\text{La série } \sum(u_n - 1) \text{ converge et } \sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n}\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

Remarque : Avec l'égalité
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} - 1 = \int_0^1 \frac{u^n(1-u^2)}{1+u^{n+2}}\,\mathrm{d}u$$

on obtient l'encadrement
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_{n+2} - 1 \leqslant \int_0^1 u^n(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui suffit à prouver la convergence de $\sum(u_n - 1)$ mais est en revanche insuffisant pour un équivalent du reste.

Exercice 9 (****)

On rappelle l'existence de la constante γ d'Euler définie par
$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$$

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : On pose $f :]\,0\,;+\infty\,[\to \mathbb{R}, t \mapsto \ln(t)\mathrm{e}^{-t}$. On a $f \in \mathscr{C}_{pm}(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ avec
$$f(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann
$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument.}}$$

Pour n entier non nul, on pose
$$\forall t \geqslant 0 \qquad f_n(t) = \begin{cases} \ln(t)\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in \,]\,0\,;n\,] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Pour $t > 0$ et $n \geqslant t$, on a

$$f_n(t) = \ln(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \ln(t)\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} = \ln(t)\mathrm{e}^{-t+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}$$

et avec l'inégalité de concavité $\ln(1-u) \leqslant -u$ pour $u < 1$, on obtient

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant |\ln(t)|\,\mathrm{e}^{-t}$$

l'inégalité étant trivialement réalisée pour $t > n$. Ainsi, par convergence dominée, on a

$$\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On note $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

Soit n entier non nul. Avec le changement de variable $t = nu$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n = n\int_0^1 \ln(nu)(1-u)^n\,\mathrm{d}u &= n\ln(n)\int_0^1 (1-u)^n\,\mathrm{d}u + n\int_0^1 \ln(u)(1-u)^n\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{n}{n+1}\ln(n) + n\int_0^1 (1-u)^n\ln(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Pour l'intégrale restante, on procède en intégrant par parties avec un bon choix de primitive pour garantir un crochet fini. Les fonctions $u \mapsto \dfrac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}$ et $u \mapsto \ln(u)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;1\,]$ avec

$$\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\ln(u) \underset{u\to 0}{=} \frac{1-(1-(n+)u+\mathrm{o}(u))}{n+1}\ln(u) \underset{u\to 0}{=} (1+\mathrm{o}(1))u\ln(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$$

par croissances comparées. Ainsi, le crochet étant fini, on obtient

$$\int_0^1 (1-u)^n\ln(u)\,\mathrm{d}u = \underbrace{\left[\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\ln(u)\right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}-1}{u}\,\mathrm{d}u$$

Enfin, un dernier changement de variable $v = 1-u$ donne

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}-1}{u}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-v^{n+1}}{1-v}\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} v^k\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

Par conséquent, on a

$$\mathrm{I}_n = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\gamma$$

Et on conclut $$\boxed{\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\gamma}$$