Corrigé du devoir en temps libre n°07

Problème I

Si K est vide ou $\mathrm{U} = \mathrm{E}$, le résultat est immédiat. On suppose K non vide et $\mathrm{U} \neq \mathrm{E}$ et on pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \varphi(x) = \mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U})$$

C'est une application continue sur E car 1-lipschitzienne. Par conséquent, l'application φ atteint un minimum sur K en $a \in \mathrm{K}$ et comme $a \notin \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}$ fermé, il s'ensuit

$$\varphi(a) = \mathrm{d}(a, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}) > 0$$

On pose $r = \varphi(a)$. Soit $x \in \mathrm{K}$, on a $\mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}) \geqslant r$. Par conséquent, pour $y \notin \mathrm{U}$, on a

$$\mathrm{d}(x, y) \geqslant \inf_{z \notin \mathrm{U}} \mathrm{d}(x, z) = \mathrm{d}(x, \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}) \geqslant r$$

ce qui prouve $$\mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U} \subset \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{B}(x, r)$$

Par complémentation, on conclut

$$\boxed{\exists r > 0 \quad | \quad \forall x \in \mathrm{K} \qquad \mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{U}}$$

Variante : Par l'absurde, supposons

$$\forall r > 0 \qquad \exists x \in \mathrm{K} \quad | \quad \mathrm{B}(x, r) \not\subset \mathrm{U}$$

d'où $$\forall n \geqslant 1 \qquad \exists x_n \in \mathrm{K} \quad | \quad \mathrm{B}(x_n, 1/n) \not\subset \mathrm{U}$$

La suite $(x_n)_n$ est à valeurs dans K compact d'où l'existence d'une extractrice φ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\mathrm{B}(x_n, 1/n) \not\subset \mathrm{U}$ d'où l'existence de $y_n \in \mathrm{B}(x_n, 1/n) \smallsetminus \mathrm{U}$. On a $\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Or, la suite $(y_n)_n$ est à valeurs dans $\mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}$ fermé d'où $x = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} \in \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{U}$ ce qui contredit $x \in \mathrm{K} \subset \mathrm{U}$. Le résultat suit.

Problème II

1. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire résulte des propriétés de la norme infinie sur l'ensemble des fonctions bornées de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$ puisque les fonctions polynomiales sont continues et donc bornées sur $[\,0\,;1\,]$. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ tel que $\|\mathrm{P}\|_\infty = 0$. On a $\mathrm{P}(t) = 0$ pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$ d'où une infinité de racines pour P ce qui prouve sa nullité. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \|\cdot\|_\infty \text{ est une norme sur E.}}$$

2. Soit $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{L}_i' = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{L}_i\right)' = 0$. On en déduit que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{L}_i$ est un polynôme constant. En substituant X par zéro, comme $\mathrm{L}_i(0) = 0$ pour $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$, il s'ensuit $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{L}_i = 0$ d'où la nullité des α_i puisque $(\mathrm{L}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est extraite de la famille libre $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$. Par conséquent, la famille $\mathscr{B} = (\mathrm{L}_i')_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre, formée d'éléments de E et de cardinal égal à $\dim \mathrm{E}$. On conclut

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} \text{ est une base de E.}}$$

3. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on dispose d'un unique $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{P} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{L}_i'$. Il vient

$$\forall j \in [\![j \,;\, n]\!] \qquad \varphi_j(\mathrm{P}) = \int_0^{x_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{L}_i \right)' (t) \, \mathrm{d}t = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{L}_i(t) \right]_0^{x_j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j$$

Par conséquent $\boxed{\forall \mathrm{P} \in \mathrm{A} \qquad \|\mathrm{P}\|_{\infty,\mathscr{B}} = \underset{j \in [\![1\,;\,n]\!]}{\mathrm{Max}} |\alpha_j| = \underset{j \in [\![1\,;\,n]\!]}{\mathrm{Max}} |\varphi_j(\mathrm{P})|}$

4. Il est immédiat que A est la boule unité fermée de E muni de $\| \cdot \|_{\infty,\mathscr{B}}$. L'espace E étant de dimension finie, le choix de la norme est sans incidence et les compacts sont exactement les fermés bornés. On conclut

$$\boxed{\text{La partie A est un compact de E.}}$$

5. En considérant la norme $\| \cdot \|_{\infty,\mathscr{B}}$, on a clairement $\|\mathrm{P}_k\|_{\infty,\mathscr{B}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ et par équivalence des normes en dimension infinie, on conclut

$$\boxed{\|\mathrm{P}_k\|_{\infty} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0}$$

Problème III

1. Soient $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{A}_\mathrm{N}^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. On a $\lambda \mathrm{P} + (1-\lambda)\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$ puis

$$(\lambda \mathrm{P} + (1-\lambda)\mathrm{Q})\,(-1) = (\lambda \mathrm{P} + (1-\lambda)\mathrm{Q})\,(1) = \lambda + 1 - \lambda = 1$$

et $$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad (\lambda \mathrm{P} + (1-\lambda)\mathrm{Q})\,(x) = \lambda \mathrm{P}(x) + (1-\lambda)\mathrm{Q}(x) \geqslant 0$$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{A}_\mathrm{N} \text{ est une partie convexe de } \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}].}$

2. L'application $\|\cdot\|$ est bien définie puisqu'une fonction polynomiale est continue donc intégrable sur un segment. Pour $(\mathrm{P}, \lambda) \in \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}] \times \mathbb{R}$, on a par linéarité de l'intégrale

$$\|\lambda \mathrm{P}\| = \int_{-1}^{1} |\lambda \mathrm{P}|\,(t) \, \mathrm{d}t = |\lambda| \int_{-1}^{1} |\mathrm{P}(t)| \, \mathrm{d}t = |\lambda| \, \|\mathrm{P}\|$$

Pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]^2$, il vient par inégalité triangulaire

$$\|\mathrm{P} + \mathrm{Q}\| = \int_{-1}^{1} |(\mathrm{P} + \mathrm{Q})(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^{1} (|\mathrm{P}(t)| + |\mathrm{Q}(t)|) \, \mathrm{d}t = \|\mathrm{P}\| + \|\mathrm{Q}\|$$

Enfin, pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$, la fonction $t \mapsto |\mathrm{P}(t)|$ étant continue positive, il vient par séparation

$$\|\mathrm{P}\| = 0 \iff \int_{-1}^{1} |\mathrm{P}(t)| \, \mathrm{d}t = 0 \iff \forall t \in [\,-1\,;1\,] \qquad |\mathrm{P}(t)| = 0$$

Le polynôme P admet une infinité de racines d'où sa nullité. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{P} \mapsto \int_{-1}^{1} |\mathrm{P}(t)| \, \mathrm{d}t \text{ est une norme sur } \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}].}$$

3. On pose $$\forall (x, \mathrm{P}) \in [\,-1\,;1\,] \times \mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}] \qquad \varphi_x(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(x)$$

Pour $x \in [\,-1\,;1\,]$, l'évaluation φ_x est une forme linéaire sur l'espace $\mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$ de dimension finie ce qui prouve qu'il s'agit d'une application continue de $\mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$ muni de $\| \cdot \|_1$ dans $\mathbb{R}$. Enfin, l'ensemble A_N peut s'écrire

$$\mathrm{A_N} = \varphi_1^{-1}(\{1\}) \cap \varphi_{-1}(\{1\}) \cap \bigcap_{x \in]-1;1[} \varphi_x^{-1}([0\,;+\infty[)$$

intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues, autrement dit intersection de fermés. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{A_N} \text{ est une fermé de } (\mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}], \|\cdot\|_1).}$$

4. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{A_N}$, on a $\mathrm{L(P)} \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. L'ensemble $\{\mathrm{L(P)}, \mathrm{P} \in \mathrm{A_N}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0 et admet donc une borne inférieure finie. Par caractérisation séquentielle, il existe $(\mathrm{P}_n)_n \in \mathrm{A_N^{\mathbb{N}}}$ telle que

$$\mathrm{L}(\mathrm{P}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} a_\mathrm{N}$$

On remarque que pour $\mathrm{P} \in \mathrm{A_N}$, on a $\mathrm{L(P)} = \|\mathrm{P}\|_1$ puisque P est positif. La suite $(\mathrm{L}(\mathrm{P}_n))_n$ étant convergente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|\mathrm{P}_n\|_1 = \mathrm{L}(\mathrm{P}_n) = \mathrm{O}(1)$$

Par conséquent, il existe $\mathrm{M} \geqslant 0$ telle que la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ est à valeurs $\mathrm{A_N} \cap \mathrm{B}_f(0, \mathrm{M})$, fermé en tant qu'intersection de fermés et borné dans espace de dimension finie donc compact. Par suite, il existe une extractrice φ telle que

$$\mathrm{P}_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{P} \in \mathrm{A_N} \cap \mathrm{B}_f(0, \mathrm{M})$$

puis, par continuité de L $\qquad \mathrm{L}(\mathrm{P}_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{L(P)}$

Par unicité de la limite, on conclut

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{P} \in \mathrm{A_N} \text{ tel que } \mathrm{L(P)} = a_\mathrm{N}.}$$

5. Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{B_N^2}$ et $\lambda \in [0\,;1]$. Par linéarité de L, il vient

$$\mathrm{L}(\lambda\mathrm{P} + (1-\lambda)\mathrm{Q}) = \lambda\mathrm{L(P)} + (1-\lambda)\mathrm{L(Q)} = (\lambda + 1 - \lambda)a_\mathrm{N} = a_\mathrm{N}$$

On a $\mathrm{B_N} = \mathrm{A_N} \cap \mathrm{L}^{-1}(\{a_\mathrm{N}\})$ fermé comme intersection de fermés puisque $\mathrm{L}^{-1}(\{a_\mathrm{N}\})$ est image réciproque d'un fermé par l'application continue L. Enfin pour $\mathrm{P} \in \mathrm{B_N}$, on a $\|\mathrm{P}\|_1 = \mathrm{L(P)} = a_\mathrm{N}$ d'où $\mathrm{B_N} \subset \mathrm{S}(0, a_\mathrm{N})$ ce qui prouve son caractère borné. L'espace $\mathbb{R}_\mathrm{N}[\mathrm{X}]$ étant de dimension finie, on conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{B_N} \text{ est un partie convexe compacte.}}$$

6. On sait que $\mathrm{B_N}$ est une partie non vide d'après le résultat de la question 4. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{B_N}$. Le polynôme $\mathrm{P}(-\mathrm{X})$ est également dans $\mathrm{B_N}$ sans difficulté et par convexité, on a $\dfrac{\mathrm{P(X)} + \mathrm{P}(-\mathrm{X})}{2} \in \mathrm{B_N}$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{B_N} \text{ contient un polynôme pair.}}$$