Corrigé du devoir en temps libre n°08

Problème I

On a $$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \qquad m^2+n^2 \leqslant (m+n)^2$$

d'où $$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \qquad \frac{1}{(m+n)^2} \leqslant \frac{1}{m^2+n^2}$$

On pose $$\forall p \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_p = \{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid m+n=p\}$$

La famille $(\mathrm{I}_p)_{p\geqslant 2}$ est un recouvrement disjoint de $\mathbb{N}^{*2}$ et on a

$$\forall p \geqslant 2 \qquad \mathrm{I}_p = \{(m,p-m), m \in [\![1\,;\,p-1]\!]\}$$

D'après le théorème de sommation par paquets pour une famille positive, il vient

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{(m+n)^2} = \sum_{p\in[\![2\,;\,+\infty]\!]} \left(\sum_{(m,n)\in \mathrm{I}_p} \frac{1}{(m+n)^2} \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{p^2} \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^2}$$

Or, on a $$\frac{p-1}{p^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p} > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} = +\infty$$

D'après le critère des équivalents (licite, signe constant), il s'ensuit

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^2} = +\infty$$

et par comparaison, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } \left(\frac{1}{m^2+n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ n'est pas sommable.}}$$

Problème II

1. Soit F partie finie de I. On a

$$\sum_{i\in\mathrm{F}} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in\mathrm{F}} u_i \leqslant \lambda \underset{\mathrm{F}\text{ fini } \subset \mathrm{I}}{\mathrm{Sup}} \sum_{i\in\mathrm{F}} u_i = \lambda \sum_{i\in\mathrm{I}} u_i$$

Pour $\lambda \in \,]\,0\,;+\infty\,[$, on trouve en appliquant cette inégalité

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i = \sum_{i\in\mathrm{I}} \frac{1}{\lambda} \lambda u_i \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda u_i$$

d'où $$\lambda \sum_{i\in\mathrm{I}} u_i \leqslant \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda u_i$$

Si $\lambda = 0$ ou si $\lambda = +\infty$ en distinguant si les u_i sont tous nuls ou pas, on constate que l'inégalité vaut toujours. On conclut

$$\boxed{\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in\mathrm{I}} u_i}$$

2. Pour F partie finie de I, on a

$$\sum_{i\in \mathrm{F}}(u_i+v_i)=\sum_{i\in \mathrm{F}}u_i+\sum_{i\in \mathrm{F}}v_i\leqslant\sum_{i\in \mathrm{I}}u_i+\sum_{i\in \mathrm{I}}v_i$$

d'où
$$\sum_{i\in \mathrm{I}}(u_i+v_i)\leqslant\sum_{i\in \mathrm{I}}u_i+\sum_{i\in i}v_i$$

Si on a $\sum_{i\in \mathrm{I}}v_i=+\infty$, avec la majoration $v_i\leqslant u_i+v_i$, on en déduit

$$\sum_{i\in \mathrm{I}}(u_i+v_i)=+\infty=\sum_{i\in \mathrm{I}}u_i+\sum_{i\in \mathrm{I}}v_i$$

On suppose $\sum_{i\in \mathrm{I}}v_i<+\infty$. Soient F et G parties finies de I. On a par positivité des u_i et v_i

$$\sum_{i\in \mathrm{F}}u_i+\sum_{i\in \mathrm{G}}v_i\leqslant\sum_{i\in \mathrm{F}\cup \mathrm{G}}u_i+\sum_{i\in \mathrm{F}\cup \mathrm{G}}v_i=\sum_{i\in \mathrm{F}\cup \mathrm{G}}(u_i+v_i)\leqslant\sum_{i\in \mathrm{I}}(u_i+v_i)$$

d'où
$$\sum_{i\in \mathrm{G}}v_i\leqslant\sum_{i\in \mathrm{I}}(u_i+v_i)-\sum_{i\in \mathrm{F}}u_i$$

On en déduit
$$\sum_{i\in \mathrm{I}}v_i\leqslant\sum_{i\in \mathrm{I}}(u_i+v_i)-\sum_{i\in \mathrm{F}}u_i$$

c'est-à-dire
$$\sum_{i\in \mathrm{F}}u_i\leqslant\sum_{i\in \mathrm{I}}(u_i+v_i)-\sum_{i\in \mathrm{I}}v_i$$

puis
$$\sum_{i\in \mathrm{I}}u_i\leqslant\sum_{i\in \mathrm{I}}(u_i+v_i)-\sum_{i\in \mathrm{I}}v_i$$

autrement dit
$$\sum_{i\in \mathrm{I}}u_i+\sum_{i\in \mathrm{I}}v_i\leqslant\sum_{i\in \mathrm{I}}(u_i+v_i)$$

On conclut
$$\boxed{\sum_{i\in \mathrm{I}}u_i+\sum_{i\in \mathrm{I}}v_i=\sum_{i\in \mathrm{I}}(u_i+v_i)}$$

Problème III

Une étude de la fonction $x\mapsto x-\ln(1+x)$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ permet d'établir

$$\forall x>0\qquad \ln(1+x)<x$$

d'où
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

et il vient

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}<\mathrm{e}\quad\text{et}\quad\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=\mathrm{e}^{1+\mathrm{o}(1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathrm{e}$$

On pose

$$\forall(n,t)\in\mathbb{N}^*\times[\,1\,;\mathrm{e}\,[\qquad f_n(t)=\begin{cases}t^{\frac{1}{n}}f(t) & \text{si } t\in\left[1\,;\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Soit $t\in[\,1\,;\mathrm{e}\,[$. Pour n assez grand, on a $t\in\left[1\,;\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$ puis

$$f_n(t) = t^{\frac{1}{n}} f(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$$

et $$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times [\,1\,;\mathrm{e}\,[\qquad |f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}\,|f(t)|$$

La dominante $\mathrm{e}\,|f|$ est intégrable sur $[\,1\,;\mathrm{e}\,[$ par hypothèse et par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} t^{\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_1^{\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Problème IV

1\. On pose $$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(t) = \frac{1+t^{n+1}}{1+t^n}$$

On clairement $f_n \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ pour tout n entier et par conséquent

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier, l'intégrale } \mathrm{I}_n \text{ est bien définie.}}$$

2\. En distinguant $t=1$ et $t \in [\,0\,;1\,[$, on trouve

$$\forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant 1$$

et la dominante $t \mapsto 1$ est clairement intégrable sur $[\,0\,;1\,]$. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$$

3\. Soit n entier non nul. On a

$$\mathrm{J}_n = 1 - \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{1+t^n-(1+t^{n+1})}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n \frac{1-t}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

Avec le changement de variable $u = t^n$, on trouve

$$\mathrm{J}_n - 1 = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1-u^{\frac{1}{n}}}{1+u} u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u$$

Et on conclut $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n^2 \mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{n\left(1-u^{\frac{1}{n}}\right)}{1+u} u^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}u}$$

4\. Par convexité, la position graphe/tangente pour l'exponentielle en zéro donne

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 1+x \leqslant \mathrm{e}^x$$

Autrement dit $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad 1-\mathrm{e}^x \leqslant -x}$$

5\. On pose $$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times \,]\,0\,;1\,] \qquad g_n(u) = \frac{n\left(1-u^{\frac{1}{n}}\right)}{1+u} u^{\frac{1}{n}}$$

Soit $u \in \,]\,0\,;1\,]$. On a $$n\left(1-u^{\frac{1}{n}}\right) = n\left(1-\mathrm{e}^{\frac{\ln(u)}{n}}\right)$$

d'où $$n\left(1-u^{\frac{1}{n}}\right) = n\left(1-1-\frac{\ln(u)}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\ln(u)+\mathrm{o}(1)$$

et $$n\left(1-u^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant -n\frac{\ln(u)}{n} = -\ln(u)$$

Par conséquent, pour $(n,u) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;1\,]$, il vient

$$g_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{\ln(u)}{1+u} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant g_n(u) \leqslant \varphi(u) \quad \text{avec} \quad \varphi(u) = -\ln(u)$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $]\,0\,;1\,]$, positive et intégrable en observant $\varphi(u) \underset{u\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$ par croissances comparées. Ainsi, par convergence dominée, il vient

$$\boxed{n^2 \mathrm{J}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 -\frac{\ln(u)}{1+u}\,\mathrm{d}u}$$

6. On a
$$n^2(1-\mathrm{I}_n) = -\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\,\mathrm{d}u + \mathrm{o}(1)$$

On conclut
$$\boxed{\mathrm{I}_n = 1 + \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\,\mathrm{d}u + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$