TD+ 03

Suites et séries de fonctions

Exercice 1. [règle d'Abel uniforme] $(***)$

1. Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I. On suppose qu'il existe deux suites de fonctions (a_n) et (b_n) telles que
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a_n b_n$;
   - $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=0}^{n} b_k(x)\right| \leqslant M$;
   - $\sum |a_n - a_{n+1}|$ converge uniformément ;
   - (a_n) converge uniformément vers 0.

   Démontrer que $\sum u_n$ converge uniformément.
2. **Application 1.**
   Énoncer un critère spécial des séries alternées dont la conclusion est la convergence uniforme de la série $\sum (-1)^n a_n$.
   Le démontrer comme cas particulier du critère d'Abel uniforme, puis directement à l'aide des résultats sur les séries alternées.
3. **Application 2.**
   Étudier la convergence uniforme de $\sum \dfrac{e^{\mathrm{i}nx}}{n}$.

Exercice 2. [Théorèmes de Dini] $(***)$

1. **Premier théorème de Dini.**
   Soit (f_n) un suite croissante de fonctions réelles continues sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$.
   On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I. Montrer que la convergence est uniforme.
2. **Deuxième théorème de Dini.**
   Soit (f_n) un suite de fonctions réelles croissantes sur un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$.
   On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 3. [Théorème taubérien faible] $(***)$

1. Rappeler le théorème d'Abel radial.
   Démontrer que la réciproque est fausse en général : trouver une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon R et de somme f ayant une limite en R^- mais telle que $\sum a_n$ diverge.
2. Les théorèmes taubériens donnent une réciproque sous certaines conditions : version faible en supposant $R = 1$ et $a_n = o(1/n)$, et version forte en supposant $R = 1$ et $a_n = O(1/n)$.
   On se propose de démontrer la version faible.
   Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et dont la somme dans le disque unité ouvert est notée f. On suppose que $a_n = o(1/n)$ et qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} S$. Montrons que $\sum a_k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n = \sup\{|k a_k| \mid k \geqslant n\}$. Justifier l'existence de M_n et démontrer que $M_n \to 0$.
   (b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0,1[,\ \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leqslant n(1-x)\dfrac{\sum_{k=1}^{n} |k a_k|}{n} + \dfrac{1}{n(1-x)} M_{n+1}$.
   (c) En déduire que $f(1 - 1/n) - \sum_{k=0}^{n} a_k \to 0$ et conclure.

Indications.

Ex1 :

1. Effectuer une transformation d'Abel (*i.e.* écrire $b_k(x) = B_k(x) - B_{k-1}(x)$ où $B_k(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i(x)$, séparer en deux sommes, réindicer, réunir les sommes) pour établir la convergence simple.
Puis démontrer que la convergence est uniforme en réutilisant les calculs précédents.
3. Appliquer le critère de la question 1. En pratique la suite (a_n) est une suite numérique (*i.e.* une suite de fonctions constantes) ce qui assure les convergences uniformes des hypothèses.

Ex2 :

1. - Supposer par l'absurde que (f_n) ne converge pas uniformément sur I.
   - Construire par récurrence une suite (x_k) d'éléments de I à l'aide de la phrase quantifiée de l'étape précédente. Montrer que l'on peut supposer que cette suite converge.
   - Utiliser la croissance de (f_n) pour obtenir une minoration de $f(x) - f_m(x)$ indépendante de x et de $m \in \mathbb{N}$.
2. - Utiliser le théorème de Heine puis considérer une subdivision régulière de $I = [a, b]$ de pas suffisamment petit pour que $\left|f(x_i) - f(x_{i+1})\right| \leqslant \varepsilon$.
   - Utiliser la monotonie des f_n pour obtenir un encadrement de $f(x) - f_n(x)$ ne dépendant plus de $x \in I$, mais de $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$, $f_n(x_i)$ et $f_n(x_{i+1})$.

Ex3 : 2.(a) Écrire la définition de $ka_k \to 0$.

2.(b) Entre autres : écrire $a_k = \frac{ka_k}{k}$; utiliser l'identité remarquable $x^k - 1 = (x-1)\sum_{\ell=0}^{k-1} x^\ell$ et majorer.

2.(c) Penser au théorème de Césaro.

⋆⋆⋆⋆⋆ Fin ⋆⋆⋆⋆⋆