Corrigé du devoir en temps libre n°09

Problème I

Soit n entier non nul et $x \in [\,0\,;1\,]$. On a

$$0 \leqslant x + \frac{x(1-x)}{n} \leqslant x + 1 - x = 1$$

et après étude de fonction $$\frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{1}{4n}$$

La fonction f est uniformément continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ d'après le théorème de Heine. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [\,0\,;1\,]^2 \qquad |x-y| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

On choisit N entier tel que $\dfrac{1}{4\mathrm{N}} \leqslant \eta$. Pour ce choix, on a donc pour n entier avec $n \geqslant \mathrm{N}$

$$\left| x + \frac{x(1-x)}{n} - x \right| = \frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{1}{4n} \leqslant \frac{1}{4\mathrm{N}} \leqslant \eta$$

d'où $$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad |f_n(x) - f(x)| = \left| f\left(x + \frac{x(1-x)}{n} \right) - f(x) \right| \leqslant \varepsilon$$

On conclut $$\boxed{f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f}$$

Problème II

1. Par dérivation, on a

$$\mathrm{B}_n(f)' = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \left[k\mathrm{X}^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)\mathrm{X}^k(1-x)^{n-k-1} \right]$$

On observe

$$\forall k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!] \qquad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \qquad (n-k)\binom{n}{k} = (n-k)\binom{n}{n-k} = n\binom{n-1}{n-1-k} = n\binom{n-1}{k}$$

Avec un changement d'indice, on trouve

$$\mathrm{B}_n(f)' = n\sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n-1}{k} \mathrm{X}^k (1-\mathrm{X})^{n-1-k}$$

Autrement dit $$\boxed{\mathrm{B}_n(f)' = \sum_{k=0}^{n-1} \tau\left(\frac{k+1}{n}, \frac{k}{n}\right) \binom{n-1}{k} \mathrm{X}^k (1-\mathrm{X})^{n-1-k}}$$

2. Par dérivation, on a

$$\mathrm{B}_n(f)'' = n\sum_{k=0}^{n-1} \tau\left(\frac{k+1}{n}, \frac{k}{n}\right) \binom{n-1}{k} \left[k\mathrm{X}^k(1-x)^{n-1-k} - (n-1-k)x^k(1-x)^{n-2-k} \right]$$

On observe $\qquad \forall k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \qquad k\binom{n-1}{k} = (n-1)\binom{n-2}{k-1}$

et $\qquad (n-1-k)\binom{n-1}{k} = (n-1-k)\binom{n-1}{n-1-k} = (n-1)\binom{n-2}{n-2-k} = (n-1)\binom{n-2}{k}$

Avec un changement d'indice, il vient

$$\boxed{\mathrm{B}_n(f)'' = (n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\left[\tau\left(\frac{k+2}{n},\frac{k+1}{n}\right) - \tau\left(\frac{k+1}{n},\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n-2}{k}\mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-2-k}}$$

3. Supposons f limite uniforme d'une suite de fonctions $(\mathrm{P}_n)_n$ polynomiales convexes. Soit $\lambda \in [\,0\,;1\,]$ et $(x,y) \in [\,0\,;1\,]^2$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda \mathrm{P}_n(x) + (1-\lambda)\mathrm{P}_n(y)$$

et comme la convergence uniforme implique la convergence simple, il vient en faisant tendre $n \to +\infty$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Réciproquement, supposons f convexe. La fonction $\tau\left(\frac{k+1}{n},\cdot\right)$ croît et on en déduit $\mathrm{B}_n(f)'' \geqslant 0$ ce qui prouve la convexité des fonctions polynomiales $x \mapsto \mathrm{B}_n f(x)(x)$. On conclut

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe si et seulement si elle est limite uniforme de fonctions polynomiales convexes}}$

Problème III

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de telles fonctions. Pour $x \neq 0$, on trouve

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} x\mathrm{O}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

ce qui prouve la dérivabilité de f en zéro. Par dérivation, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

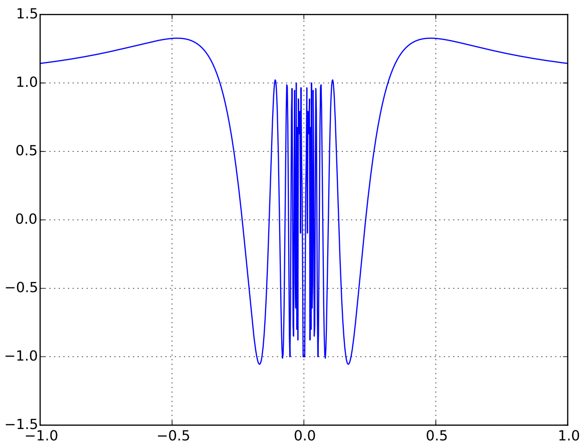

FIGURE 1 – Graphe de f'

Soit n entier non nul. On trouve

$$f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \frac{2}{2n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 = f'(0) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2n\pi} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

On conclut $\boxed{f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^*,\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f \notin \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

2. L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [\,0\,;1\,]$ est infini puisqu'il contient par exemple les inverses d'entiers non nuls. C'est donc une partie infinie de l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathbb{Q} \cap [\,0\,;1\,] \text{ est dénombrable.}}$$

3. Les fonctions f_n sont continues puisque la fonction f l'est. On observe

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad x - r_n \in [\,-1\,;1\,]$$

et comme la fonction f est continue sur le segment $[\,-1\,;1\,]$, elle y est bornée et il vient

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}\|f\|_{\infty,[\,-1\,;1\,]}$$

On en déduit que la série de fonctions continues $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[\,0\,;1\,]$ et on conclut

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})}$$

4. Avec l'inégalité $|\sin(u)| \leqslant |u|$ pour u réel, on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad |f'(x)| \leqslant 2\,|x|\,\frac{1}{|x|} + 1 \leqslant 3$$

et la majoration vaut aussi pour $x = 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f' \text{ est bornée.}}$$

Soit $x_0 \in [\,0\,;1\,]$ et $(g_n)_n$ la suite de fonctions suggérée dans l'énoncé. Les fonctions g_n sont continues sur $[\,0\,;1\,]$ et d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|g_n\|_\infty \leqslant \frac{\|f'\|_\infty}{2^n}$$

Par convergence normale et donc uniforme, il vient

$$\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x_0)$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction F est dérivable sur } [\,0\,;1\,] \text{ avec } \mathrm{F}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \text{ pour } x \in [\,0\,;1\,].}$

5. Par dérivation, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n'(x) = \frac{f'(x - r_n)}{2^n} \quad \text{et} \quad |f_n'(x)| \leqslant \frac{\|f'\|_\infty}{2^n}$$

Ainsi, d'après l'étude préliminaire faite sur la fonction f, pour n entier, la fonction f_n' est continue sur $[\,0\,;1\,] \smallsetminus \{r_n\}$ et discontinue en r_n. Soit $x_0 \in (\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}) \cap [\,0\,;1\,]$. Les fonctions f_n' sont continues en x_0 puisque $x_0 \neq r_n$ pour tout n entier et la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[\,0\,;1\,]$ autrement dit, la suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k'\right)_n$ continues en x_0 converge uniformément sur un voisinage de x_0. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \mathrm{F}' \text{ est continue en tout point de } (\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}) \cap [\,0\,;1\,].}$$

Soit n_0 entier. Les fonctions f_n' avec $n \neq n_0$ sont continues en r_{n_0} puisque $r_n \neq r_{n_0}$ et par convergence normale et donc uniforme, on en déduit que la somme $\sum\limits_{n=0, n\neq n_0}^{+\infty} f_n'$ est continue en r_{n_0}. Enfin, la fonction f_{n_0}' n'est pas continue en r_{n_0}. En décomposant

$$\mathrm{F}' = f_{n_0}' + \sum_{n=0, n\neq n_0}^{+\infty} f_n'$$

on en déduit que la fonction F′ n'est pas continue en r_{n_0}. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction F}' \text{ est discontinue en tout de point de } \mathbb{Q} \cap [\,0\,;1\,].}$$