Feuille d'exercices n°43

Exercice 1 (*)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

Étudier le mode convergence de la suite de fonctions $(u_n)_n$.

Corrigé : On a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CS}} 0$ mais $u_n(n) = \sin 1 \neq 0$ ce qui contredit la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Soit $a > 0$. Avec l'inégalité $|\sin u| \leqslant |u|$ pour u réel, il vient

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,-a\,;a\,] \qquad \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{a}{n}$$

On conclut

La suite $(u_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, pas uniformément sur $\mathbb{R}$ mais uniformément sur tout segment.

Exercice 2 (*)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \qquad u_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx}$$

Étudier le mode convergence de la suite de fonctions $(u_n)_n$.

Corrigé : On a $u_n(0) = 0$ pour tout n entier et $u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour $x > 0$ par croissances comparées. Puis, on remarque l'égalité $u_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \mathrm{e}^{-1}$ pour n entier non nul qui contredit la convergence uniforme sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Soit $a > 0$. Les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \qquad u_n'(x) = n\mathrm{e}^{-nx}(1-nx)$$

On en déduit que u_n décroît sur $\left[\,\dfrac{1}{n}\,;+\infty\,\right[$. Ainsi, pour $n > \dfrac{1}{a}$, on a

$$\|u_n\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} = u_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On conclut

La suite de fonctions $(u_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$ mais uniformément sur tout intervalle $[\,a\,;+\infty\,[$ avec $a > 0$.

Exercice 3 (*)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies de $[\,a\,;b\,]$ sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. Soit $(x_n)_n \in [\,a\,;b\,]^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Montrer

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

Corrigé : Comme $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CU}} f$, on dispose de N entier tel que $f_n - f$ est bornée pour $n \geqslant \mathrm{N}$. Par inégalité triangulaire, on trouve pour $n \geqslant \mathrm{N}$

$$\begin{aligned}|f_n(x_n)-f(x)| &\leqslant |f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x)|\\ &\leqslant \|f_n-f\|_\infty+\mathrm{o}(1)\end{aligned}$$

le $\mathrm{o}(1)$ résultant de la continuité de f en x. On conclut alors

$$\boxed{f_n(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)}$$

Remarque : Il faut choisir n suffisamment grand. Rien ne garantit *a priori* que les f_n sont bornées sur $[\,a\,;b\,]$. La fonction $\varphi : [\,0\,;1\,]\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t)=\dfrac{1}{t}$ pour $t\in\,]\,0\,;1\,]$ et $\varphi(0)=0$ est bien définie sur $[\,0\,;1\,]$ et clairement non bornée.

Exercice 4 (*)

Soit $a\geqslant 0$. On pose

$$\forall (n,x)\in\mathbb{N}\times[\,0\,;1\,]\qquad u_n(x)=n^a x^n(1-x)$$

Étudier le mode de convergence de la suite de fonctions $(u_n)_n$ en fonction de a.

Corrigé : On a $u_n(1)=0$ pour n entier et $u_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour $x\in[\,0\,;1\,[$ par croissances comparées. Les fonctions u_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\forall (n,x)\in\mathbb{N}\times[\,0\,;1\,]\qquad u_n'(x)=n^a x^{n-1}(n-(n+1)x)$$

d'où $$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \|u_n\|_\infty=u_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{n^a}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Ainsi $$\|u_n\|_\infty\underset{n\to+\infty}{\sim}\mathrm{e}^{-1}n^{a-1}$$

On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge simplement vers la fonction nulle, uniformément si et seulement si } a<1.}$$

Exercice 5 (**)

On pose $$\forall (n,x)\in\mathbb{N}\times\left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]\qquad u_n(x)=n\sin(x)\cos(x)^n$$

Étudier le mode convergence de la suite de fonctions $(u_n)_n$.

Corrigé : On a $u_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour $x\in\left]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$ par croissances comparées et $u_n(0)=0$. On observe, avec le changement de variable $u=\cos(t)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} n\sin(t)\cos(t)^n\,\mathrm{d}t=\int_0^1 nu^n\,\mathrm{d}u=\frac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

ce qui contredit la convergence uniforme. On peut aussi remarquer pour n entier non nul

$$u_n\left(\frac{1}{n}\right)=n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)^n=(1+\mathrm{o}(1))\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=(1+\mathrm{o}(1))\mathrm{e}^{\mathrm{o}(1)}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Pour $a\in\left]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$, on trouve par croissances comparées

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \|u_n\|_{\infty,\left[\,a\,;\frac{\pi}{2}\,\right]}\leqslant n\cos(a)^n\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On conclut

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (u_n)_n \text{ converge simplement vers la fonction nulle, pas uniformément sur } \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \text{ mais uniformément sur tout intervalle } \left[a\,;\frac{\pi}{2}\right] \text{ avec } a \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right].}$$

Exercice 6 (**)

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \qquad u_n(x) = \frac{nx^2 \mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$$

Étudier le mode convergence de la suite de fonctions $(u_n)_n$.

Corrigé : On a $u_n(0) = 0$ pour tout n entier et $u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $x > 0$ par croissances comparées. On observe que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n^2}})} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n\left(\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \qquad v_n(x) = x^2 \mathrm{e}^{-nx}$$

Après étude, on observe que v_n décroît sur $\left[\frac{2}{n}\,;+\infty\right[$. Ainsi, pour $a > 0$, on a

$$\forall n \geqslant \frac{2}{a} \qquad \forall x \geqslant a \qquad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{n}{1-\mathrm{e}^{-a^2}} v_n(a) = \mathrm{o}(1)$$

On conclut

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (u_n)_n \text{ converge simplement vers la fonction nulle, pas uniformément sur } \mathbb{R}_+ \text{ mais uniformément sur tout intervalle } [\,a\,;+\infty[\text{ avec } a > 0.}$$

Exercice 7 (**)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = nx^n \sin(\pi x)$$

Étudier le mode de convergence de $(f_n)_n$.

Corrigé : On a $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CS}} 0$. Notant $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour n entier non nul, on trouve

$$f_n(x_n) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi\mathrm{e}^{-1}$$

ce qui contredit la convergence uniforme sur $[\,0\,;1\,]$. Pour $a \in \,]\,0\,;1\,[$, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_{\infty,[\,0\,;a\,]} \leqslant na^n = \mathrm{o}(1)$$

On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge simplement vers la fonction nulle, pas uniformément sur } [\,0\,;1\,] \text{ mais uniformément sur tout intervalle } [\,0\,;a\,] \text{ avec } a \in \,]\,0\,;1\,[.}$$

Exercice 8 (**)

On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \qquad f_n(x) = \cos\left(\dfrac{nx}{n+1}\right)$

Étudier le mode de convergence de $(f_n)_n$.

Corrigé : On $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CS}} \cos$. On pose $x_n = (n+1)\pi$ pour n entier. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(x_n) - f(x_n)| = |\cos(n\pi) - \cos((n+1)\pi)| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

On n'a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Considérons le cas d'un segment $[\,a\,;b\,]$. La fonction cos étant 1-lipschitzienne, on obtient

$$\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad \left|\cos\left(\frac{nx}{n+1}\right) - \cos x\right| \leqslant \frac{|x|}{n+1} \leqslant \frac{\max(|a|\,,|b|)}{n+1}$$

On en déduit la convergence uniforme sur tout segment. On conclut

La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers cos, pas uniformément sur $\mathbb{R}$ mais uniformément sur tout segment.

Exercice 9 (**)

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dérivée seconde bornée. Étudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{R} \qquad u_n(t) = n\left[f\left(t+\frac{1}{n}\right) - f(t)\right]$$

Corrigé : Soit t réel. D'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$u_n(t) = n\left[f(t) + f'(t)\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) - f(t)\right] = f'(t) + \mathrm{o}(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(t)$$

Autrement dit, la suite $(u_n)_n$ converge simplement vers f'. Puis, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, notant M un majorant de $|f''|$ sur $\mathbb{R}$, il vient

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{R} \qquad \left|f\left(t+\frac{1}{n}\right) - f(t) - f'(t)\frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n^2}$$

d'où $\qquad \forall (n,t) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{R} \qquad |u_n(t) - f'(t)| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{n}$

Ainsi $\qquad$ La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement et uniformément vers f'.

Exercice 10 (**)

Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{R} \qquad g_n(x) = \frac{f^2(x)}{\sqrt{f^2(x) + \dfrac{1}{n}}}$$

Étudier les modes de convergence de de la suite de fonctions $(g_n)_n$.

Corrigé : On a clairement $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} |f(x)|$

Fixons x réel. Pour n entier non nul, on a

$$|g_n(x) - |f|\,(x)| = \frac{|f(x)|}{\sqrt{f^2(x) + \dfrac{1}{n}}} \left| \sqrt{f^2(x)} - \sqrt{f^2(x) + \frac{1}{n}} \right|$$

En multipliant par la quantité conjuquée, il vient

$$|g_n(x) - |f|\,(x)| = \frac{|f(x)|}{\sqrt{f^2(x) + \dfrac{1}{n}}} \left| \frac{f^2(x) - f^2(x) - \dfrac{1}{n}}{\sqrt{f^2(x)} + \sqrt{f^2(x) + \dfrac{1}{n}}} \right|$$

On a $$\frac{|f(x)|}{\sqrt{f^2(x) + \dfrac{1}{n}}} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{f^2(x)} + \sqrt{f^2(x) + \frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

d'où $$|g_n(x) - |f|\,(x)| \leqslant \frac{1}{n} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Par suite $$\boxed{\|g_n - |f|\,\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Exercice 11 (**)

Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues définies sur un intervalle I est elle-même uniformément continue.

Corrigé : Soit $(x, y) \in \mathrm{I}^2$. Pour n entier, on a

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit un entier n tel que $|f_n(u) - f(u)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $u \in \mathrm{I}$ puis $\eta > 0$ tel que $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \varepsilon$ pour $|x - y| \leqslant \eta$. Ainsi

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2 \qquad |x - y| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant 3\varepsilon$$

On conclut

$$\boxed{\text{Une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.}}$$

Exercice 12 (*)

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(\mathrm{P}_n)_n$ de polynômes telles que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour toit n entier et convergeant uniformément sur $[\,a\,;b\,]$ vers f.

Corrigé : D'après le théorème de Weierstrass, il existe $(\mathrm{Q}_n)_n$ une suite de polynômes telle que $\|\mathrm{Q}_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n = \mathrm{Q}_n - \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{Q}_n(t)\,\mathrm{d}t$$

La suite $(\mathrm{P}_n)_n$ ainsi construite vérifie bien la condition $\displaystyle\int_a^b \mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour n entier et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Q}_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ par convergence uniforme. Ainsi, pour n entier, on a

$$\mathrm{P}_n - f = \mathrm{Q}_n - f - \frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{Q}_n(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où
$$\|\mathrm{P}_n - f\|_\infty \leqslant \|\mathrm{Q}_n - f\|_\infty + \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b \mathrm{Q}_n(t)\,\mathrm{d}t\right| = \mathrm{o}(1)$$

$$\boxed{\text{Il existe } (\mathrm{P}_n)_n \text{ suite de polynômes vérifiant } \int_a^b \mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ pour } n \text{ entier et } \mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{CU}} f \text{ sur } [\,a\,;b\,].}$$

Exercice 13 (**)

Soit $(\mathrm{P}_n)_n$ une suite de polynômes réels convergeant uniformément vers zéro sur $[\,-1\,;0\,]$ et telle que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ pour tout n entier. Montrer que la suite $(\deg \mathrm{P}_n)_n$ n'est pas majorée.

Corrigé : Supposons $(\deg \mathrm{P}_n)_n$ bornée. Les normes $\|\cdot\|_{\infty,[\,-1\,;0\,]}$ et $\mathrm{P} \mapsto \displaystyle\int_0^1 |\mathrm{P}(t)|\,\mathrm{d}t$ sont équivalentes. Alors, on a

$$\left|\int_0^1 \mathrm{P}_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |\mathrm{P}_n(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ce qui est contradictoire. Ainsi

$$\boxed{\text{La suite } (\deg \mathrm{P}_n)_n \text{ n'est pas majorée.}}$$

Remarque : En considérant f définie par

$$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [\,-1\,;0\,] \\ 2x & \text{si } x \in [\,0\,;1\,] \end{cases}$$

et $(\mathrm{B}_n(f))_n$ la suite des polynômes de Bernstein associée à cette fonction, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{P}_n = \mathrm{B}_n(f) + 1 - \int_0^1 \mathrm{B}_n(f)(t)\,\mathrm{d}t$$

La suite $(\mathrm{P}_n)_n$ ainsi construite satisfait les contraintes de l'énoncé.

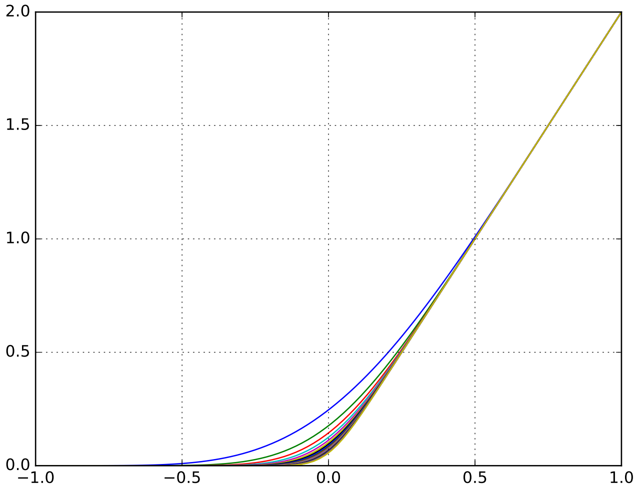

FIGURE 1 – Suite de polynômes de Bernstein

Si par curiosité on regarde le graphe de ces polynômes hors de l'intervalle $[-1;1]$, on observe des comportements explosifs ! Le fait d'avoir contraint chaque polynôme à un comportement déterminé sur $[-1;1]$ se paye par un degré très élevé puisque le degré du polynôme correspond en gros aux degrés de liberté dont on dispose pour « bricoler » le comportement du polynôme.

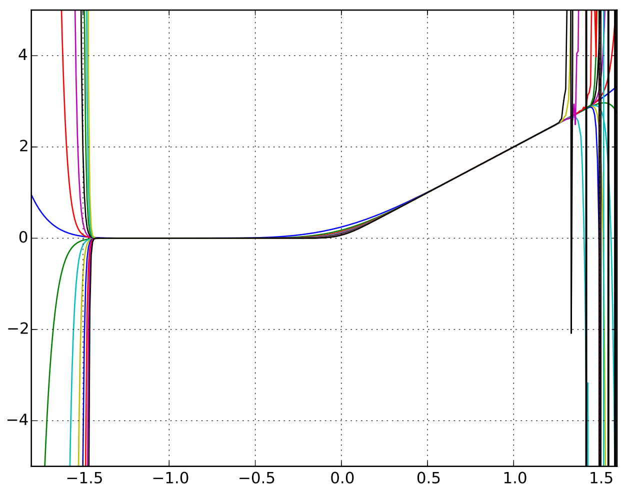

FIGURE 2 – Explosion hors de $[-1;1]$