

## Feuille d'exercices n°44

### Exercice 1 (\*\*)

Soit une suite  $(f_n)_n \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$  qui converge uniformément vers  $f$ . Montrer que

$$\frac{f_n}{1 + f_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} \frac{f}{1 + f^2}$$

**Corrigé :** On pose  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

Il en résulte que  $|\varphi'(x)| \leq 1$  pour tout  $x$  réel. D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction  $\varphi$  est 1-lipschitzienne d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\varphi \circ f_n - \varphi \circ f| \leq |f_n - f|$$

Par comparaison, on conclut

$$\boxed{\frac{f_n}{1 + f_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} \frac{f}{1 + f^2}}$$

### Exercice 2 (\*\*)

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$  telle que  $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$  pour tout  $n$  entier. Montrer que  $f = 0$ .

**Corrigé :** Par linéarité du produit et de l'intégrale, il vient

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \int_0^1 f(t)P(t) dt = 0$$

L'idée consiste, d'après le théorème de Weierstrass, à approcher en un certain sens  $f$  par  $P$  dans cette égalité pour aboutir à  $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème de Weierstrass, il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\|P - f\|_{\infty} \leq \varepsilon$ . Puis

$$\int_0^1 f^2(t) dt = \int_0^1 f(t) [f(t) - P(t) + P(t)] dt = \int_0^1 f(t)(f - P)(t) dt + \int_0^1 f(t)P(t) dt$$

Par hypothèse sur  $f$ , il s'ensuit

$$\int_0^1 f^2(t) dt = \int_0^1 f(t)(f - P)(t) dt \leq \|f\|_{\infty} \|f - P\|_{\infty} \leq \varepsilon \|f\|_{\infty}$$

Comme  $\varepsilon$  peut être choisi arbitrairement petit, on a  $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$  et la fonction  $f^2$  étant continue et positive sur  $[0; 1]$ , on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est nulle.}}$$

**Variante :** Soit  $f \in E$ . D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite  $(P_n)_n \in \mathbb{R}[X]^\mathbb{N}$  telle que  $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CU} f$ . On vérifie sans difficulté

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f^2 - fP_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty = o(1)$$

ce qui prouve  $fP_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CU} f^2$ . Il en résulte

$$\int_0^1 f(t)P_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f^2(t) dt$$

Or, on a  $\int_0^1 f(t)P_n(t) dt = 0$  pour tout  $n$  entier. Il s'agit donc d'une suite constante nulle et on obtient  $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$ . On conclut comme précédemment.

**Remarque :** Notant  $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ , on munit l'espace du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$  pour  $(f, g) \in E^2$ . Dans un espace préhilbertien réel, on peut montrer que pour  $F$  sev de  $E$ , on a  $F^\perp = \overline{F}^\perp$ . On montre ici que  $\mathbb{R}[X]^\perp = \{0_E\}$  d'où  $\overline{\mathbb{R}[X]}^\perp = \{0_E\}$ . L'adhérence  $\overline{\mathbb{R}[X]}$  s'entend en sens de la norme euclidienne. D'après le théorème de Weierstrass, on a  $\mathbb{R}[X]$  dense dans  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Or, la norme  $\|\cdot\|_\infty$  est plus fine que la norme euclidienne et il s'ensuit que  $\mathbb{R}[X]$  est dense dans  $E$  pour la norme euclidienne, autrement dit  $\overline{\mathbb{R}[X]} = E$  d'où le résultat obtenu.

### Exercice 3 (\*\*)

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$  et  $(P_n)_n \in \mathbb{R}_N[X]^\mathbb{N}$  telle que  $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CS} f$ . Montrer

$$P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CU} f$$

**Corrigé :** On choisit  $0 \leq x_0 < \dots < x_N \leq 1$  et  $\mathcal{L} = (L_i)_{0 \leq i \leq N}$  la base de polynômes de Lagrange associée, i.e. on a  $L_i \in \mathbb{R}_N[X]$  pour tout  $i \in \llbracket 0; N \rrbracket$  et  $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$  pour tout  $0 \leq i, j \leq N$ . La décomposition de  $P_n$  dans  $\mathcal{L}$  s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = \sum_{i=0}^N P_n(x_i) L_i$$

Les suites coordonnées de  $(P_n)_n$  convergent par convergence simple de  $(P_n)_n$ . Ainsi, la suite  $(P_n)_n$  converge vers  $\sum_{i=0}^N f(x_i) L_i$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{L}}$  et comme celle-ci est équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{\infty, [0;1]}$  sur l'espace de dimension finie  $\mathbb{R}_N[X]$ , on en déduit que

$$\|P_n - \sum_{i=0}^N f(x_i) L_i\|_{\infty, [0;1]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

La convergence uniforme implique la convergence simple d'où  $f = \sum_{i=0}^N f(x_i) L_i$  par unicité de la limite pour la convergence simple. On conclut

$$\boxed{P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CU} f \quad \text{avec} \quad f = \sum_{i=0}^N f(x_i) L_i}$$

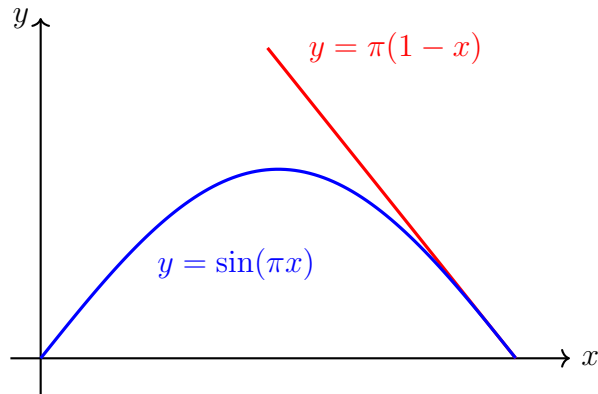
## Exercice 4 (\*\*)

On pose  $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$

Étudier le mode de convergence de la suite  $(f_n)_n$ .

**Corrigé :** On a  $f_n(1) = 0$  pour  $n$  entier et  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  pour tout  $x \in [0; 1[$ . Ainsi, la suite  $(f_n)_n$  converge simplement vers la fonction nulle. Par concavité, on a

$$\forall x \in [0; 1] \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)$$



Il s'ensuit  $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad 0 \leq f_n(x) \leq g_n(x)$  avec  $g_n(x) = \pi x^n(1 - x)$

Après étude de fonction, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\pi}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi e^{-1}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On conclut

La suite  $(f_n)_n$  converge uniformément vers la fonction nulle.

## Exercice 5 (\*\*\*)

On pose  $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad f_n(x) = \sin(x)^n \cos(x)$

Étudier le mode de convergence de la suite  $(f_n)_n$ .

**Corrigé :** Si  $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ , on a  $|\sin(x)| < 1$  d'où  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Si  $x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ , on a  $\cos(x) = 0$  d'où  $f_n(x) = 0$ . Ainsi, la suite  $(f_n)_n$  converge simplement vers la fonction nulle. Des tentatives pour établir la non convergence uniforme ne sont pas fructueuses. La fonction  $|f_n|$  est  $\pi$ -périodique et on a de plus  $|f_n(x)| = |f_n(\pi - x)|$  pour  $x$  réel. On peut donc restreindre l'étude sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et par dérivation

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f'_n(x) &= n \sin(x)^{n-1} \cos(x)^2 - \sin(x)^{n+1} \\ &= \sin(x)^{n-1} (n \cos(x)^2 - \sin(x)^2) = \sin(x)^{n-1} ((n+1) \cos(x)^2 - 1) \end{aligned}$$

d'où  $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[ \quad f'_n(x) = 0 \iff x = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

Comme la fonction  $|f_n|$  n'atteint pas son maximum en 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , on en déduit

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \left| f_n \left( \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

On conclut

La suite  $(f_n)_n$  converge uniformément vers la fonction nulle.

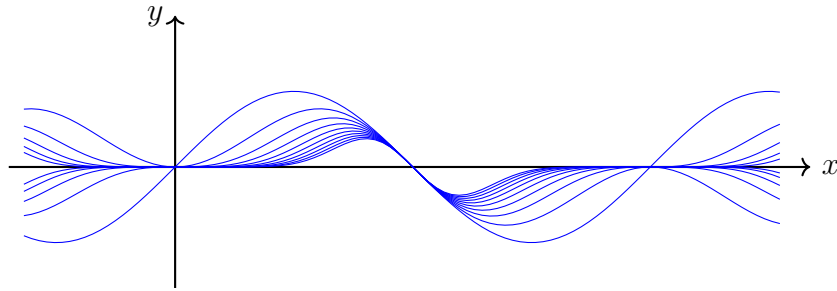


FIGURE 1 – Suite des graphes de  $f_n$

### Exercice 6 (\*\*\*)

On pose  $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0; n]}(x)$

Étudier le mode de convergence de la suite  $(f_n)_n$ .

**Corrigé :** On a  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-x}$  pour  $x \geq 0$ . L'inégalité de concavité  $\ln(1+u) \leq u$  pour  $u$  réel donne

$$\forall x \in [0; n[ \quad |f_n(x) - f(x)| = e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x} \left(1 - e^{x+n \ln(1-\frac{x}{n})}\right)$$

On pose  $g_n(x) = x + n \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right)$

On a  $g \in \mathcal{C}^1([0; n[, \mathbb{R})$  et  $g'_n(x) = \frac{-x/n}{1-x/n}$  pour  $x \in [0; n[$ . Ainsi, la fonction  $g_n$  décroît donc  $1 - \exp \circ g_n$  croît. On obtient

$$\forall x \in [\sqrt{n}; n[ \quad |f_n(x) - f(x)| \leq e^{-\sqrt{n}}$$

et  $\forall x \in [0; \sqrt{n}] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq 1 - e^{g_n(\sqrt{n})} = o(1)$

Enfin  $\forall x \geq n \quad |f_n(x) - f(x)| = e^{-n}$

On conclut

La suite  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $x \mapsto e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

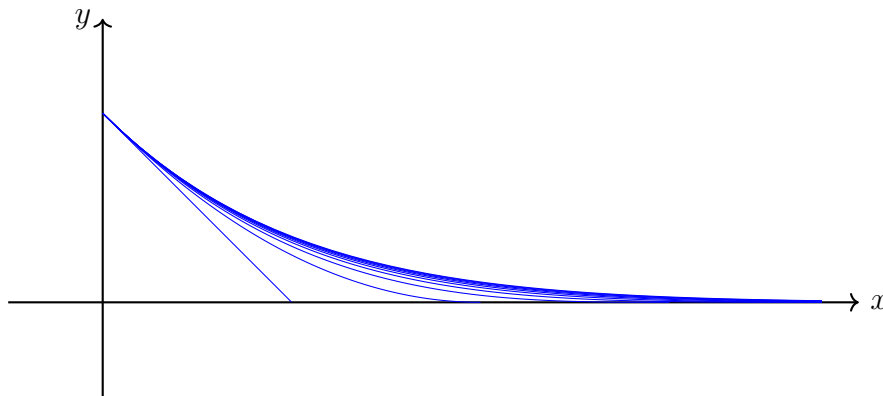


FIGURE 2 – Suite des graphes de  $f_n$

**Variante :** Soit  $n$  entier non nul. Notant  $\delta_n = |f_n - f|$ , on trouve

$$\forall x \in [0; n] \quad \delta'_n(x) = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} = e^{-x} (e^{h_n(x)} - 1)$$

avec 
$$h_n(x) = x + (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) \quad \text{et} \quad h'_n(x) = \frac{1-x}{n-x}$$

Après étude de variations, on trouve qu'il existe  $x_n \geq 1$  tel que  $\delta_n$  atteint son maximum en ce point avec  $\delta'_n(x_n) = 0$  d'où  $e^{-x_n} = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}$  d'où

$$\delta_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = e^{-x_n} \left(1 - 1 + \frac{x_n}{n}\right) = \frac{x_n e^{-x_n}}{n}$$

Enfin, la fonction  $u \mapsto ue^{-u}$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$  (après une étude rapide) par  $e^{-1}$  d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \delta_n(x_n) \leq \frac{e^{-1}}{n}$$

et par encadrement, on retrouve la convergence uniforme de la suite  $(f_n)_n$ .

### Exercice 7 (\*\*\*)

Soit  $(u_n)_n$  une suite de fonctions  $k$ -lipschitzienne sur  $[0; 1]$  avec  $k > 0$ . Montre que si  $(u_n)_n$  converge simplement, alors elle converge uniformément sur  $[0; 1]$ .

**Corrigé :** Notons  $u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Pour  $(x, y) \in [0; 1]^2$ , on a

$$|u(x) - u(y)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n(x) - u_n(y)| \quad \text{et} \quad |u_n(x) - u_n(y)| \leq k|x - y|$$

d'où

$$|u(x) - u(y)| \leq k|x - y|$$

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$  une subdivision de  $[0; 1]$  telle que  $x_{i+1} - x_i \leq \varepsilon/k$  pour  $i \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ . Il existe  $N$  entier tel que pour  $n \geq N$ , on a  $|u_n(x_i) - u(x_i)| \leq \varepsilon$  pour tout  $i \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$  (nombre fini de points à contrôler). Pour  $x \in [0; 1]$ , il existe  $i \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$  tel que  $x \in [x_i; x_{i+1}]$ . On a pour  $n \geq N$

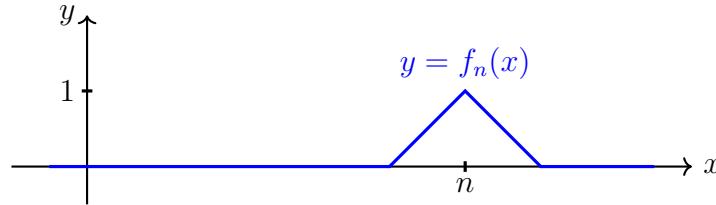
$$\begin{aligned} |u(x) - u_n(x)| &= |u(x) - u(x_i) + u(x_i) - u_n(x_i) + u_n(x_i) - u_n(x)| \\ &\leq |u(x) - u(x_i)| + |u(x_i) - u_n(x_i)| + |u_n(x_i) - u_n(x)| \\ |u(x) - u_n(x)| &\leq 2k|x - x_i| + |u(x_i) - u_n(x_i)| \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

Comme le choix de  $N$  ne dépend que de  $\varepsilon$ , on conclut

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} u}$$

**Remarque :** On peut remplacer  $[0; 1]$  par un intervalle borné et le résultat a encore lieu. En revanche, sur un intervalle non borné, le résultat est faux. On peut considérer par exemple

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad f_n(x) = \max(0, 1 - |x - n|)$$



On a  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CS}} f = 0$  mais  $f_n(n) = 1 \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  ce qui prouve qu'il n'y a pas convergence uniforme.

### Exercice 8 (\*\*\*)

Soit  $(P_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $[0; 1]$  par

$$\forall x \in [0; 1] \quad P_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$$

1. Établir  $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$
2. En déduire que  $(P_n)_n$  converge uniformément vers  $x \mapsto \sqrt{x}$  sur  $[0; 1]$ .
3. Construire une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers  $x \mapsto |x|$  sur  $[-1; 1]$ .

**Corrigé :** 1. Soit  $n$  entier et  $x \in [0; 1]$ . On observe

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right)$$

On procède ensuite par récurrence. Pour  $n$  entier, on note

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

L'initialisation  $\mathcal{P}(0)$  est immédiate. Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie pour  $n$  entier fixé. Pour  $x \in [0; 1]$ , on a  $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$  par hypothèse de récurrence et par suite

$$\forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq 1 - \sqrt{x} \leq 1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \leq 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$$

d'où 
$$\forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n+1}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n}$$

2. Posons  $\varphi_n(u) = u \left(1 - \frac{u}{2}\right)^n$  pour  $u \in [0; 1]$  et  $n$  entier. Après étude de fonction, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|\varphi_n\|_\infty = \varphi_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2e^{-1}}{n}$$

Avec l'encadrement de la question précédente, on a

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \|\varphi_n\|_n$$

Ainsi

La suite  $(P_n)_n$  converge uniformément vers la fonction  $\sqrt{\cdot}$ .

3. Pour  $n$  entier, on choisit  $Q_n$  défini par  $Q_n(x) = P_n(x^2)$  pour  $x \in [-1; 1]$ . Par récurrence immédiate, la suite  $(P_n)_n$  est une suite de fonctions polynomiales et par conséquent  $(Q_n)_n$  également. Puis, on a

$$\sup_{x \in [-1; 1]} |Q_n(x) - |x|| = \sup_{x \in [-1; 1]} |P_n(x^2) - \sqrt{x^2}| = \sup_{u \in [0; 1]} |P_n(u) - \sqrt{u}|$$

D'après le résultat de la question précédente, on conclut

La suite  $(Q_n)_n$  est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers la fonction  $|\cdot|$ .

**Remarque :** Cet exercice est sans doute inspirée par la méthode de Newton appliquée à la fonction  $f : u \mapsto u - x^2$ . On définit la suite  $(u_n)_n$  avec  $u_0 \in [\sqrt{x}; 1]$  et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{x - u_n^2}{2u_n}$$

On vérifie  $f([\sqrt{x}; 1]) \subset [\sqrt{x}; 1]$ . On en déduit  $\sqrt{x} \leq u_n \leq 1$  pour tout  $n$  entier et par suite

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{x - u_n^2}{2u_n} \geq u_n + \frac{x - u_n^2}{2}$$

ce qui motive l'étude de la suite de fonctions étudiée dans l'exercice.

### Exercice 9 (\*\*\*)

On définit la suite de fonctions  $(u_n)_n$  sur  $[0; 1]$  par

$$\forall x \in [0; 1] \quad u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$$

1. Montrer  $\forall (x, n) \in [0; 1] \times \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. En déduire la convergence simple de  $(u_n)_n$ .
3. Montrer que  $(u_n)_n$  converge uniformément vers  $u$  non nulle solution de  $u'(x) = u(x - x^2)$ .

**Corrigé :** 1. On remarque tout d'abord qu'on a bien  $t - t^2 = t(1 - t) \in [0; 1]$  pour  $t \in [0; 1]$ . Pour  $n$  entier, on note

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a  $u_1(x) = 1 + x$  d'où  $0 \leq u_1(x) - u_0(x) = x$  pour tout  $x \in [0; 1]$  ce qui prouve  $\mathcal{P}(1)$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie pour  $n$  entier fixé. Pour  $x \in [0; 1]$ , on a par linéarité de l'intégrale

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x [u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2)] dt$$

avec  $\forall t \in [0; 1] \quad 0 \leq u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \leq \frac{(t(1 - t))^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$

Ainsi

$$0 \leq u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

ce qui clôt la récurrence. On a donc

$$\boxed{\forall (x, n) \in [0; 1] \times \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

2. Soit  $x \in [0; 1]$ . La série  $\sum \frac{x^n}{n!}$  converge (série exponentielle, critère de d'Alembert). Par comparaison de séries à termes positifs, la série  $\sum [u_{n+1}(x) - u_n(x)]$  converge. Alors, d'après le théorème sur les séries télescopiques, on en déduit la convergence de la suite  $(u_n(x))_n$  autrement

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (u_n)_n \text{ converge simplement.}}$$

3. D'après le théorème fondamental d'intégration, on vérifie par récurrence que la suite  $(u_n)_n$  est une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  donc *a fortiori* continues sur  $[0; 1]$ . On a pour  $n$  entier

$$\forall x \in [0; 1] \quad \sum_{k=n}^{+\infty} [u_{k+1}(x) - u_k(x)] = u(x) - u_n(x) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = o(1)$$

On en déduit la convergence uniforme de  $(u_n)_n$  vers  $u$  qui est donc continue sur  $[0; 1]$  comme limite uniforme de telles fonctions. Pour  $x \in [0; 1]$ , comme  $t - t^2 \in [0; 1]$  pour  $t \in [0; 1]$ , il vient

$$\forall t \in [0; x] \quad |u_n(t - t^2) - u(t - t^2)| \leq \|u_n - u\|_\infty$$

Ainsi, par convergence uniforme

$$\forall x \in [0; 1] \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + \int_0^x u(t - t^2) dt$$

Par unicité de la limite, on obtient

$$\forall x \in [0; 1] \quad u(x) = 1 + \int_0^x u(t - t^2) dt$$

On a  $u(0) = 1$  et d'après le théorème fondamental d'intégration, on conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ converge uniformément vers } u \text{ non nulle solution de } u'(x) = u(x - x^2).}$$

## Exercice 10 (\*\*\*)

Soit  $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{R})$ .

1. Étudier le comportement asymptotique de  $\int_a^b f(t) e^{int} dt$  pour  $n \rightarrow +\infty$ .

2. En déduire les comportements de  $\int_a^b f(t) \cos(nt) dt$  et  $\int_a^b f(t) \sin(nt) dt$  pour  $n \rightarrow +\infty$ .

**Corrigé :** 1. Soit  $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$  et  $(a_i)_{i \in \llbracket 0; p \rrbracket}$  une subdivision adaptée à  $\varphi$  avec  $\varphi|_{]a_j; a_{j+1}[} = \lambda_j$  scalaire pour tout  $j \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ . On a pour  $n$  entier

$$\int_a^b \varphi(t) e^{int} dt = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j \int_{a_j}^{a_{j+1}} e^{int} dt = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j [e^{int}]_{a_j}^{a_{j+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Soit  $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{R})$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$  telle que  $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon/(b-a)$ . Par suite

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) e^{int} dt \right| &\leq \left| \int_a^b [f(t) - \varphi(t)] e^{int} dt \right| + \left| \int_a^b \varphi(t) e^{int} dt \right| \\ &\leq (b-a) \|f - \varphi\|_\infty + \left| \int_a^b \varphi(t) e^{int} dt \right| \end{aligned}$$

Il existe  $N$  entier tel que pour  $\left| \int_a^b \varphi(t) e^{int} dt \right| \leq \varepsilon$  pour  $n \geq N$  et on a donc

$$\forall n \geq N \quad \left| \int_a^b f(t) e^{int} dt \right| \leq 2\varepsilon$$

Ainsi

$$\boxed{\int_a^b f(t) e^{int} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$$

**Remarque :** On peut comprendre intuitivement ce résultat. Quand  $n$  est très grand, la période de  $t \mapsto e^{int}$  est très courte et la fonction  $f$  « semble » constante sur une période très courte. L'intégrale d'une fonction constante multipliée par  $t \mapsto e^{int}$  est nulle sur une période ce qui explique le phénomène observé. Ce résultat s'intitule *lemme de Lebesgue-Riemann*. Il existe une version « perfusée » de ce résultat où  $f$  est supposée de classe  $\mathcal{C}^1$  : la preuve s'obtient alors par simple intégration par parties.

**Variante :** On peut établir le résultat par double limite. Soit  $(\varphi_k)_k$  à valeurs dans  $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$  telle que  $\varphi_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CU} f$ . On pose

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 \quad u_k(n) = \int_a^b \varphi_k(t) e^{int} dt \quad \text{et} \quad v(n) = \int_a^b f(t) e^{int} dt$$

$$\text{On a } \forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 \quad |u_k(n) - v(n)| = \left| \int_a^b [\varphi_k(t) - f(t)] e^{int} dt \right| \leq (b-a) \|\varphi_k - f\|_\infty$$

d'où  $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{CU} v$ . Par double limite, la suite  $(v(n))_n$  converge avec

$$v(n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_k(n) = 0$$

et on retrouve le résultat annoncé.

2. Considérant partie réelle et imaginaire de  $\int_a^b f(t) e^{int} dt$  pour  $n$  entier, on conclut

$$\boxed{\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$$

**Remarque :** Les résultats qui précèdent s'étendent sans difficulté au cas de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

### Exercice 11 (\*\*\*\*)

Soit  $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{K})$ . Déterminer

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt$$

**Corrigé :** Soit  $\alpha \geq 0$  et  $\lambda > 0$ . Le changement de variable  $u = \lambda t$  donne

$$\int_0^\alpha |\sin(\lambda t)| \, dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha\lambda} |\sin u| \, du$$

La fonction  $|\sin|$  est  $\pi$ -périodique. On va donc s'efforcer de mettre en valeur une intégrale sur un intervalle de longueur un multiple de  $\pi$ . On pose  $n_\lambda = \left\lfloor \frac{\lambda\alpha}{\pi} \right\rfloor$ . On a

$$\frac{\lambda\alpha}{\pi} - 1 < n_\lambda \leq \frac{\lambda\alpha}{\pi} \quad \text{et} \quad 0 \leq \lambda\alpha - n_\lambda\pi < \pi$$

D'après la relation de Chasles, comme  $n_\lambda$  est un entier naturel (du fait du choix  $\alpha \geq 0$ ), il vient

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha\lambda} |\sin u| \, du = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n_\lambda-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u| \, du + \frac{1}{\lambda} \int_{n_\lambda\pi}^{\lambda\alpha} |\sin u| \, du$$

On a

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u| \, du = \int_0^\pi \sin u \, du = 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_{n_\lambda\pi}^{\lambda\alpha} |\sin u| \, du \leq \lambda\alpha - n_\lambda\pi < \pi$$

Ainsi 
$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha\lambda} |\sin u| \, du \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{=} \frac{2n_\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} O(1)$$

D'après un encadrement précédemment établi, on a clairement  $n_\lambda \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda\alpha}{\pi}$  et par conséquent

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha\lambda} |\sin u| \, du \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2\alpha}{\pi}$$

Si  $\alpha \leq 0$ , le changement de variables  $u = -\lambda t$  permet de se ramener à la situation précédente. Pour  $\alpha, \beta$  réels, il vient

$$\int_\alpha^\beta |\sin(\lambda t)| \, dt = \int_0^\beta |\sin(\lambda t)| \, dt - \int_0^\alpha |\sin(\lambda t)| \, dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi}(\beta - \alpha)$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$  et  $(a_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$  une subdivision de  $[a; b]$  adaptée à la fonction  $\varphi$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , il existe  $\gamma_i$  scalaire tel que  $\varphi|_{]a_i; a_{i+1}[} = \gamma_i$ . Par suite

$$\int_a^b \varphi(t) |\sin(\lambda t)| \, dt = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\sin(\lambda t)| \, dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i (a_{i+1} - a_i) = \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(t) \, dt$$

Généralisons ce résultat pour toute fonction continue par morceaux. Soit  $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{K})$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\varphi \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$  tel que  $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$ . Il vient par inégalité triangulaire pour  $\lambda > 0$

$$\left| \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| \, dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \left| \int_a^b (f - \varphi)(t) |\sin(\lambda t)| \, dt \right| + \left| \int_a^b \varphi(t) |\sin(\lambda t)| \, dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(t) \, dt \right| + \left| \frac{2}{\pi} \int_a^b (\varphi - f)(t) \, dt \right|$$

Il existe un seuil  $\Lambda \geq 0$  tel que pour  $\lambda \geq \Lambda$ , on ait

$$\left| \int_a^b \varphi(t) |\sin(\lambda t)| \, dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(t) \, dt \right| \leq \varepsilon$$

Ainsi 
$$\left| \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| \, dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \varepsilon \left( \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) (b-a) + 1 \right)$$

avec un majorant qu'on peut choisir arbitrairement petit. On conclut

$$\boxed{\int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| \, dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) \, dt}$$

**Variante :** On peut établir le résultat par double limite. Soit  $(\varphi_n)_n$  à valeurs dans  $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$  telle que  $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} f$ . On pose

$$\forall (n, \lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \quad u_n(\lambda) = \int_a^b \varphi_n(t) |\sin(\lambda t)| \, dt \quad \text{et} \quad v(\lambda) = \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| \, dt$$

On a

$$\forall (n, \lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \quad |u_n(\lambda) - v(\lambda)| = \left| \int_a^b [\varphi_n(t) - f(t)] |\sin(\lambda t)| \, dt \right| \leq (b-a) \|\varphi_n - f\|_\infty$$

d'où  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} v$ . Par double limite, la fonction  $v$  admet une limite en  $+\infty$  avec

$$v(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_n(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi_n(t) \, dt$$

et par convergence uniforme 
$$\frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi_n(t) \, dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) \, dt$$

On retrouve le résultat annoncé.