

Feuille d'exercices n°44

Exercice 1 (**)

Soit une suite $(f_n)_n \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f . Montrer que

$$\frac{f_n}{1 + f_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} \frac{f}{1 + f^2}$$

Corrigé : On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

La fonction φ est dérivable sur \mathbb{R} et on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

Il en résulte que $|\varphi'(x)| \leq 1$ pour tout x réel. D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction φ est 1-lipschitzienne d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\varphi \circ f_n - \varphi \circ f| \leq |f_n - f|$$

Par comparaison, on conclut

$$\boxed{\frac{f_n}{1 + f_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} \frac{f}{1 + f^2}}$$

Exercice 2 (**)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$ pour tout n entier. Montrer que $f = 0$.

Corrigé : Par linéarité du produit et de l'intégrale, il vient

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \int_0^1 f(t)P(t) dt = 0$$

L'idée consiste, d'après le théorème de Weierstrass, à approcher en un certain sens f par P dans cette égalité pour aboutir à $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|P - f\|_{\infty} \leq \varepsilon$. Puis

$$\int_0^1 f^2(t) dt = \int_0^1 f(t)[f(t) - P(t) + P(t)] dt = \int_0^1 f(t)(f - P)(t) dt + \int_0^1 f(t)P(t) dt$$

Par hypothèse sur f , il s'ensuit

$$\int_0^1 f^2(t) dt = \int_0^1 f(t)(f - P)(t) dt \leq \|f\|_{\infty}\|f - P\|_{\infty} \leq \varepsilon\|f\|_{\infty}$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$ et la fonction f^2 étant continue et positive sur $[0;1]$, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est nulle.}}$$

Variante : Soit $f \in E$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_n \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} f$. On vérifie sans difficulté

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f^2 - fP_n\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} \|f - P_n\|_{\infty} = o(1)$$

ce qui prouve $fP_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} f^2$. Il en résulte

$$\int_0^1 f(t)P_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f^2(t) dt$$

Or, on a $\int_0^1 f(t)P_n(t) dt = 0$ pour tout n entier. Il s'agit donc d'une suite constante nulle et on obtient $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$. On conclut comme précédemment.

Remarque : Notant $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$, on munit l'espace du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ pour $(f, g) \in E^2$. Dans un espace préhilbertien réel, on peut montrer que pour F sev de E , on a $F^\perp = \bar{F}^\perp$. On montre ici que $\mathbb{R}[X]^\perp = \{0_E\}$ d'où $\overline{\mathbb{R}[X]}^\perp = \{0_E\}$. L'adhérence $\overline{\mathbb{R}[X]}$ s'entend en sens de la norme euclidienne. D'après le théorème de Weierstrass, on a $\mathbb{R}[X]$ dense dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Or, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est plus fine que la norme euclidienne et il s'ensuit que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans E pour la norme euclidienne, autrement dit $\overline{\mathbb{R}[X]} = E$ d'où le résultat obtenu.

Exercice 3 (**)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ et $(P_n)_n \in \mathbb{R}_N[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CS}} f$. Montrer

$$P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} f$$

Corrigé : On choisit $0 \leq x_0 < \dots < x_N \leq 1$ et $\mathcal{L} = (L_i)_{0 \leq i \leq N}$ la base de polynômes de Lagrange associée, i.e. on a $L_i \in \mathbb{R}_N[X]$ pour tout $i \in [0; N]$ et $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $0 \leq i, j \leq N$. La décomposition de P_n dans \mathcal{L} s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = \sum_{i=0}^N P_n(x_i) L_i$$

Les suites coordonnées de $(P_n)_n$ convergent par convergence simple de $(P_n)_n$. Ainsi, la suite $(P_n)_n$ converge vers $\sum_{i=0}^N f(x_i) L_i$ pour la norme $\|\cdot\|_{\infty, \mathcal{L}}$ et comme celle-ci est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\infty, [0; 1]}$ sur l'espace de dimension finie $\mathbb{R}_N[X]$, on en déduit que

$$\|P_n - \sum_{i=0}^N f(x_i) L_i\|_{\infty, [0; 1]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

La convergence uniforme implique la convergence simple d'où $f = \sum_{i=0}^N f(x_i) L_i$ par unicité de la limite pour la convergence simple. On conclut

$P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} f \quad \text{avec} \quad f = \sum_{i=0}^N f(x_i) L_i$

Exercice 4 (**)

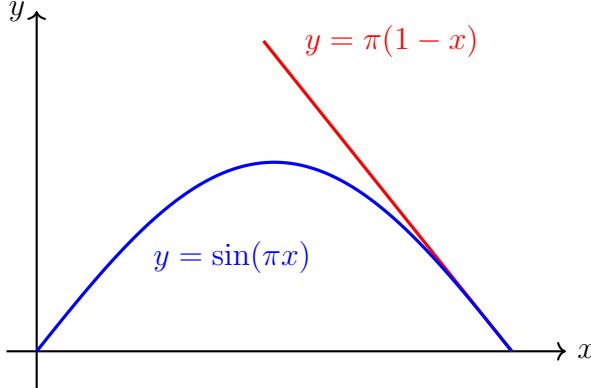
On pose

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$$

Étudier le mode de convergence de la suite $(f_n)_n$.

Corrigé : On a $f_n(1) = 0$ pour n entier et $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ pour tout $x \in [0; 1[$. Ainsi, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Par concavité, on a

$$\forall x \in [0; 1] \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)$$



Il s'ensuit $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad 0 \leq f_n(x) \leq g_n(x)$ avec $g_n(x) = \pi x^n (1 - x)$

Après étude de fonction, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\pi}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi e^{-1}}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

On conclut

La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 5 (***)

On pose

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad f_n(x) = \sin(x)^n \cos(x)$$

Étudier le mode de convergence de la suite $(f_n)_n$.

Corrigé : Si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, on a $|\sin(x)| < 1$ d'où $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Si $x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, on a $\cos(x) = 0$ d'où $f_n(x) = 0$. Ainsi, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Des tentatives pour établir la non convergence uniforme ne sont pas fructueuses. La fonction $|f_n|$ est π -périodique et on a de plus $|f_n(x)| = |f_n(\pi - x)|$ pour x réel. On peut donc restreindre l'étude sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et par dérivation

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f'_n(x) &= n \sin(x)^{n-1} \cos(x)^2 - \sin(x)^{n+1} \\ &= \sin(x)^{n-1} (n \cos(x)^2 - \sin(x)^2) = \sin(x)^{n-1} ((n+1) \cos(x)^2 - 1) \end{aligned}$$

d'où

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f'_n(x) = 0 \iff x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

Comme la fonction $|f_n|$ n'atteint pas son maximum en 0 et $\frac{\pi}{2}$, on en déduit

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \left| f_n \left(\arccos \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

On conclut

La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle.

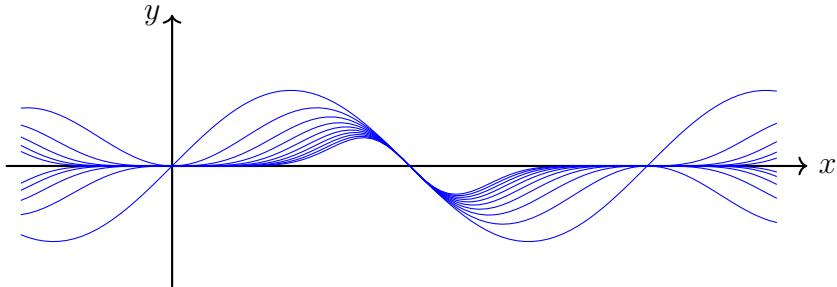


FIGURE 1 – Suite des graphes de f_n

Exercice 6 (***)

On pose

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0; n]}(x)$$

Étudier le mode de convergence de la suite $(f_n)_n$.

Corrigé : On a $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-x}$ pour $x \geq 0$. L'inégalité de concavité $\ln(1 + u) \leq u$ pour u réel donne

$$\forall x \in [0; n] \quad |f_n(x) - f(x)| = e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x} \left(1 - e^{x+n \ln(1-\frac{x}{n})}\right)$$

On pose

$$g_n(x) = x + n \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right)$$

On a $g \in \mathcal{C}^1([0; n[, \mathbb{R})$ et $g'_n(x) = \frac{-x/n}{1-x/n}$ pour $x \in [0; n[$. Ainsi, la fonction g_n décroît donc $1 - \exp \circ g_n$ croît. On obtient

$$\forall x \in [\sqrt{n}; n] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq e^{-\sqrt{n}}$$

et

$$\forall x \in [0; \sqrt{n}] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq 1 - e^{g_n(\sqrt{n})} = o(1)$$

Enfin

$$\forall x \geq n \quad |f_n(x) - f(x)| = e^{-n}$$

On conclut

La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $x \mapsto e^{-x}$ sur \mathbb{R}_+ .

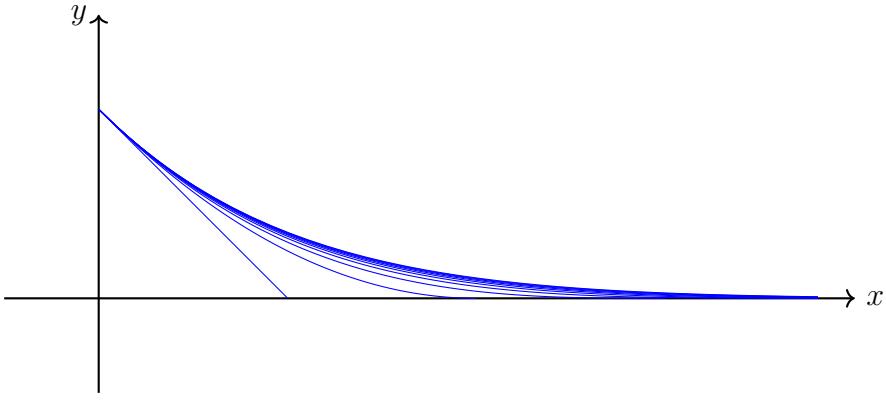


FIGURE 2 – Suite des graphes de f_n

Variante : Soit n entier non nul. Notant $\delta_n = |f_n - f|$, on trouve

$$\forall x \in [0; n] \quad \delta'_n(x) = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} = e^{-x} \left(e^{h_n(x)} - 1\right)$$

avec $h_n(x) = x + (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right)$ et $h'_n(x) = \frac{1-x}{n-x}$

Après étude de variations, on trouve qu'il existe $x_n \geq 1$ tel que δ_n atteint son maximum en ce point avec $\delta'_n(x_n) = 0$ d'où $e^{-x_n} = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}$ d'où

$$\delta_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = e^{-x_n} \left(1 - 1 + \frac{x_n}{n}\right) = \frac{x_n e^{-x_n}}{n}$$

Enfin, la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ est bornée sur \mathbb{R}_+ (après une étude rapide) par e^{-1} d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \delta_n(x_n) \leq \frac{e^{-1}}{n}$$

et par encadrement, on retrouve la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$.

Exercice 7 (***)

Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions k -lipschitzienne sur $[0; 1]$ avec $k > 0$. Montre que si $(u_n)_n$ converge simplement, alors elle converge uniformément sur $[0; 1]$.

Corrigé : Notons $u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Pour $(x, y) \in [0; 1]^2$, on a

$$|u(x) - u(y)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n(x) - u_n(y)| \quad \text{et} \quad |u_n(x) - u_n(y)| \leq k|x - y|$$

d'où

$$|u(x) - u(y)| \leq k|x - y|$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ une subdivision de $[0; 1]$ telle que $x_{i+1} - x_i \leq \varepsilon/k$ pour $i \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$. Il existe N entier tel que pour $n \geq N$, on a $|u_n(x_i) - u(x_i)| \leq \varepsilon$ pour tout $i \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ (nombre fini de points à contrôler). Pour $x \in [0; 1]$, il existe $i \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ tel que $x \in [x_i; x_{i+1}]$. On a pour $n \geq N$

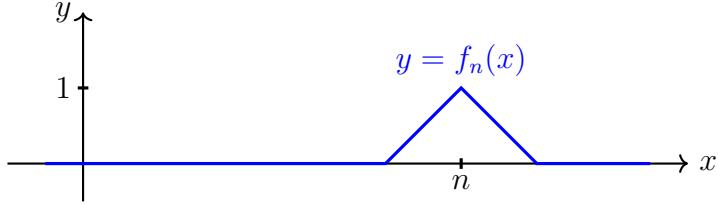
$$\begin{aligned} |u(x) - u_n(x)| &= |u(x) - u(x_i) + u(x_i) - u_n(x_i) + u_n(x_i) - u_n(x)| \\ &\leq |u(x) - u(x_i)| + |u(x_i) - u_n(x_i)| + |u_n(x_i) - u_n(x)| \\ |u(x) - u_n(x)| &\leq 2k|x - x_i| + |u(x_i) - u_n(x_i)| \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

Comme le choix de N ne dépend que de ε , on conclut

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} u}$$

Remarque : On peut remplacer $[0; 1]$ par un intervalle borné et le résultat a encore lieu. En revanche, sur un intervalle non borné, le résultat est faux. On peut considérer par exemple

$$\forall(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad f_n(x) = \max(0, 1 - |x - n|)$$



On a $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CS}} f = 0$ mais $f_n(n) = 1 \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ce qui prouve qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Exercice 8 (***)

Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $[0; 1]$ par

$$\forall x \in [0; 1] \quad P_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$$

1. Établir $\forall(n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$
2. En déduire que $(P_n)_n$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; 1]$.
3. Construire une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1; 1]$.

Corrigé : 1. Soit n entier et $x \in [0; 1]$. On observe

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right)$$

On procède ensuite par récurrence. Pour n entier, on note

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

L'initialisation $\mathcal{P}(0)$ est immédiate. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour n entier fixé. Pour $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ par hypothèse de récurrence et par suite

$$\forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq 1 - \sqrt{x} \leq 1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \leq 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$$

d'où $\forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n+1}$

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall(n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n}$$

2. Posons $\varphi_n(u) = u \left(1 - \frac{u}{2}\right)^n$ pour $u \in [0; 1]$ et n entier. Après étude de fonction, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|\varphi_n\|_\infty = \varphi_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2e^{-1}}{n}$$

Avec l'encadrement de la question précédente, on a

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \|\varphi_n\|_n$$

Ainsi

La suite $(P_n)_n$ converge uniformément vers la fonction $\sqrt{\cdot}$.

3. Pour n entier, on choisit Q_n défini par $Q_n(x) = P_n(x^2)$ pour $x \in [-1; 1]$. Par récurrence immédiate, la suite $(P_n)_n$ est une suite de fonctions polynomiales et par conséquent $(Q_n)_n$ également. Puis, on a

$$\sup_{x \in [-1; 1]} |Q_n(x) - |x|| = \sup_{x \in [-1; 1]} |P_n(x^2) - \sqrt{x^2}| = \sup_{u \in [0; 1]} |P_n(u) - \sqrt{u}|$$

D'après le résultat de la question précédente, on conclut

La suite $(Q_n)_n$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers la fonction $|\cdot|$.

Remarque : Cet exercice est sans doute inspirée par la méthode de Newton appliquée à la fonction $f : u \mapsto u - x^2$. On définit la suite $(u_n)_n$ avec $u_0 \in [\sqrt{x}; 1]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{x - u_n^2}{2u_n}$$

On vérifie $f([\sqrt{x}; 1]) \subset [\sqrt{x}; 1]$. On en déduit $\sqrt{x} \leq u_n \leq 1$ pour tout n entier et par suite

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{x - u_n^2}{2u_n} \geq u_n + \frac{x - u_n^2}{2}$$

ce qui motive l'étude de la suite de fonctions étudiée dans l'exercice.

Exercice 9 (***)

On définit la suite de fonctions $(u_n)_n$ sur $[0; 1]$ par

$$\forall x \in [0; 1] \quad u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$$

1. Montrer $\forall (x, n) \in [0; 1] \times \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. En déduire la convergence simple de $(u_n)_n$.
3. Montrer que $(u_n)_n$ converge uniformément vers u non nulle solution de $u'(x) = u(x - x^2)$.

Corrigé : 1. On remarque tout d'abord qu'on a bien $t - t^2 = t(1 - t) \in [0; 1]$ pour $t \in [0; 1]$. Pour n entier, on note

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a $u_1(x) = 1 + x$ d'où $0 \leq u_1(x) - u_0(x) = x$ pour tout $x \in [0; 1]$ ce qui prouve $\mathcal{P}(1)$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour n entier fixé. Pour $x \in [0; 1]$, on a par linéarité de l'intégrale

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x [u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2)] dt$$

$$\text{avec } \forall t \in [0; 1] \quad 0 \leq u_{n+1}(t - t^2) - u_n(t - t^2) \leq \frac{(t(1-t))^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ainsi

$$0 \leq u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

ce qui clôture la récurrence. On a donc

$$\boxed{\forall (x, n) \in [0; 1] \times \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

2. Soit $x \in [0; 1]$. La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge (série exponentielle, critère de d'Alembert). Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum [u_{n+1}(x) - u_n(x)]$ converge. Alors, d'après le théorème sur les séries télescopiques, on en déduit la convergence de la suite $(u_n(x))_n$ autrement

La suite de fonctions $(u_n)_n$ converge simplement.

3. D'après le théorème fondamental d'intégration, on vérifie par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 donc *a fortiori* continues sur $[0; 1]$. On a pour n entier

$$\forall x \in [0; 1] \quad \sum_{k=n}^{+\infty} [u_{k+1}(x) - u_k(x)] = u(x) - u_n(x) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = o(1)$$

On en déduit la convergence uniforme de $(u_n)_n$ vers u qui est donc continue sur $[0; 1]$ comme limite uniforme de telles fonctions. Pour $x \in [0; 1]$, comme $t - t^2 \in [0; 1]$ pour $t \in [0; 1]$, il vient

$$\forall t \in [0; x] \quad |u_n(t - t^2) - u(t - t^2)| \leq \|u_n - u\|_\infty$$

Ainsi, par convergence uniforme

$$\forall x \in [0; 1] \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 + \int_0^x u(t - t^2) dt$$

Par unicité de la limite, on obtient

$$\forall x \in [0; 1] \quad u(x) = 1 + \int_0^x u(t - t^2) dt$$

On a $u(0) = 1$ et d'après le théorème fondamental d'intégration, on conclut

La suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers u non nulle solution de $u'(x) = u(x - x^2)$.

Exercice 10 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{R})$.

1. Étudier le comportement asymptotique de $\int_a^b f(t) e^{int} dt$ pour $n \rightarrow +\infty$.
2. En déduire les comportements de $\int_a^b f(t) \cos(nt) dt$ et $\int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : 1. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ et $(a_i)_{i \in \llbracket 0; p \rrbracket}$ une subdivision adaptée à φ avec $\varphi|_{[a_j; a_{j+1}]} = \lambda_j$ scalaire pour tout $j \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$. On a pour n entier

$$\int_a^b \varphi(t) e^{int} dt = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j \int_{a_j}^{a_{j+1}} e^{int} dt = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j [e^{int}]_{a_j}^{a_{j+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon/(b-a)$. Par suite

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) e^{int} dt \right| &\leq \left| \int_a^b [f(t) - \varphi(t)] e^{int} dt \right| + \left| \int_a^b \varphi(t) e^{int} dt \right| \\ &\leq (b-a) \|f - \varphi\|_\infty + \left| \int_a^b \varphi(t) e^{int} dt \right| \end{aligned}$$

Il existe N entier tel que pour $\left| \int_a^b \varphi(t) e^{int} dt \right| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$ et on a donc

$$\forall n \geq N \quad \left| \int_a^b f(t) e^{int} dt \right| \leq 2\varepsilon$$

Ainsi

$$\boxed{\int_a^b f(t) e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Remarque : On peut comprendre intuitivement ce résultat. Quand n est très grand, la période de $t \mapsto e^{int}$ est très courte et la fonction f « semble » constante sur une période très courte. L'intégrale d'une fonction constante multipliée par $t \mapsto e^{int}$ est nulle sur une période ce qui explique le phénomène observé. Ce résultat s'intitule *lemme de Lebesgue-Riemann*. Il existe une version « perfusée » de ce résultat où f est supposée de classe \mathcal{C}^1 : la preuve s'obtient alors par simple intégration par parties.

Variante : On peut établir le résultat par double limite. Soit $(\varphi_k)_k$ à valeurs dans $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ telle que $\varphi_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} f$. On pose

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 \quad u_k(n) = \int_a^b \varphi_k(t) e^{int} dt \quad \text{et} \quad v(n) = \int_a^b f(t) e^{int} dt$$

$$\text{On a } \forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 \quad |u_k(n) - v(n)| = \left| \int_a^b [\varphi_k(t) - f(t)] e^{int} dt \right| \leq (b-a) \|\varphi_k - f\|_\infty$$

d'où $u_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{CU}} v$. Par double limite, la suite $(v(n))_n$ converge avec

$$v(n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_k(n) = 0$$

et on retrouve le résultat annoncé.

2. Considérant partie réelle et imaginaire de $\int_a^b f(t) e^{int} dt$ pour n entier, on conclut

$$\boxed{\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Remarque : Les résultats qui précédent s'étendent sans difficulté au cas de fonctions à valeurs dans \mathbb{C} .

Exercice 11 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{K})$. Déterminer

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt$$

Corrigé : Soit $\alpha \geq 0$ et $\lambda > 0$. Le changement de variable $u = \lambda t$ donne

$$\int_0^\alpha |\sin(\lambda t)| dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda\alpha} |\sin u| du$$

La fonction $|\sin|$ est π -périodique. On va donc s'efforcer de mettre en valeur une intégrale sur un intervalle de longueur un multiple de π . On pose $n_\lambda = \left\lfloor \frac{\lambda\alpha}{\pi} \right\rfloor$. On a

$$\frac{\lambda\alpha}{\pi} - 1 < n_\lambda \leq \frac{\lambda\alpha}{\pi} \quad \text{et} \quad 0 \leq \lambda\alpha - n_\lambda\pi < \pi$$

D'après la relation de Chasles, comme n_λ est un entier naturel (du fait du choix $\alpha \geq 0$), il vient

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda\alpha} |\sin u| du = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n_\lambda-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u| du + \frac{1}{\lambda} \int_{n_\lambda\pi}^{\lambda\alpha} |\sin u| du$$

On a

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin u| du = \int_0^\pi |\sin u| du = 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_{n_\lambda\pi}^{\lambda\alpha} |\sin u| du \leq \lambda\alpha - n_\lambda\pi < \pi$$

Ainsi

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda\alpha} |\sin u| du \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{} \frac{2n_\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} O(1)$$

D'après un encadrement précédemment établi, on a clairement $n_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{} \frac{\lambda\alpha}{\pi}$ et par conséquent

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda\alpha} |\sin u| du \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{} \frac{2\alpha}{\pi}$$

Si $\alpha \leq 0$, le changement de variables $u = -\lambda t$ permet de se ramener à la situation précédente. Pour α, β réels, il vient

$$\int_\alpha^\beta |\sin(\lambda t)| dt = \int_0^\beta |\sin(\lambda t)| dt - \int_0^\alpha |\sin(\lambda t)| dt \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{} \frac{2}{\pi}(\beta - \alpha)$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$ et $(a_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ une subdivision de $[a; b]$ adaptée à la fonction φ . Pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, il existe γ_i scalaire tel que $\varphi|_{[a_i; a_{i+1}]} = \gamma_i$. Par suite

$$\int_a^b \varphi(t) |\sin(\lambda t)| dt = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\sin(\lambda t)| dt \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{} \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i (a_{i+1} - a_i) = \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(t) dt$$

Généralisons ce résultat pour toute fonction continue par morceaux. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$ tel que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$. Il vient par inégalité triangulaire pour $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \\ \left| \int_a^b (f - \varphi)(t) |\sin(\lambda t)| dt \right| + \left| \int_a^b \varphi(t) |\sin(\lambda t)| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(t) dt \right| + \left| \frac{2}{\pi} \int_a^b (\varphi - f)(t) dt \right| \end{aligned}$$

Il existe un seuil $\Lambda \geq 0$ tel que pour $\lambda \geq \Lambda$, on ait

$$\left| \int_a^b \varphi(t) |\sin(\lambda t)| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\left| \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt - \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \varepsilon \left(\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) (b-a) + 1 \right)$$

avec un majorant qu'on peut choisir arbitrairement petit. On conclut

$$\boxed{\int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{} \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt}$$

Variante : On peut établir le résultat par double limite. Soit $(\varphi_n)_n$ à valeurs dans $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})$ telle que $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} f$. On pose

$$\forall (n, \lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \quad u_n(\lambda) = \int_a^b \varphi_n(t) |\sin(\lambda t)| dt \quad \text{et} \quad v(\lambda) = \int_a^b f(t) |\sin(\lambda t)| dt$$

On a

$$\forall (n, \lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \quad |u_n(\lambda) - v(\lambda)| = \left| \int_a^b [\varphi_n(t) - f(t)] |\sin(\lambda t)| dt \right| \leq (b-a) \|\varphi_n - f\|_\infty$$

d'où $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CU}} v$. Par double limite, la fonction v admet une limite en $+\infty$ avec

$$v(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\lambda) \xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_n(\lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi_n(t) dt$$

et par convergence uniforme $\frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) dt$

On retrouve le résultat annoncé.