TD ONDES ELECTROMAGNETIQUES II

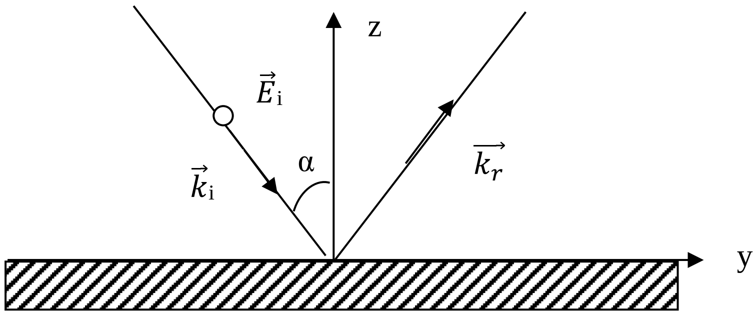
Exercice 1 :** PROPAGATION D'ONDES LONGITUDINALES DANS UN PLASMA

Dans un plasma dilué, on étudie la possibilité de propagation du champ électromagnétique suivant :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_x}.$$

1) Caractériser cette onde. Que vaut le champ magnétique ?
2) Ce plasma est-il localement neutre ? Exprimer la densité volumique de charges.
3) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un électron. En déduire une relation entre la dérivée de la densité volumique de courant $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ et $\vec{E}$.
4) A l'aide des équations de Maxwell, trouver une autre relation entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$.
5) En déduire l'équation vérifiée par $\vec{E}$. Quelle est la relation de dispersion ? Calculer la vitesse de groupe.
6) Calculer le vecteur de Poynting. Conclure sur la propagation de l'énergie.

Exercice 2♥ :** REFLEXION SOUS INCIDENCE OBLIQUE SUR UN CONDUCTEUR PARFAIT



Une onde plane progressive monochromatique dans le vide se réfléchit sur un métal parfaitement conducteur avec
un champ électrique tangent à la surface du métal (d'équation z=0) et un vecteur d'onde qui fait un angle α avec la normale à la surface.

1) Déterminer le champ magnétique incident et les champs réfléchis.
2) Exprimer les densités surfaciques de charge et de courant.
3) On peut montrer que la force $d\vec{F}$ exercée par le champ électromagnétique sur un élément de métal parfait d'aire dS est donné par l'expression : $d\vec{F}$=1/2.$\left[\sigma\vec{E} + \overrightarrow{J_S}\wedge\vec{B}\right]dS$

La calculer ici. Pourquoi parle-t-on de pression de radiation ?

Exercice 3♥ :** REFLEXION ET TRANSMISSION A L'INTERFACE DE DEUX MILIEUX TRANSPARENTS

Deux milieux semi-infinis, transparents, d'indices n_1 et n_2, occupent les demi-espaces $z \leq 0$ et $z \geq 0$.
Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{u_x}$ arrive depuis les $z \leq 0$ en incidence normale sur l'interface.
On admettra qu'il y a ici continuité des champs électriques et magnétiques en z=0.

1) On rappelle que la célérité des ondes dans un milieu d'indice n est égale à c/n. En déduire la relation entre k et ω pour une OEMPPM dans un milieu d'indice n.
2) On appelle $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique (Cela signifie que, si on note E_0 l'amplitude du champ électrique incident, on note $\underline{r}E_0$ l'amplitude complexe du champ électrique réfléchi et $\underline{t}E_0$ celle du champ électrique transmis). Ecrire en notation complexe les champs électriques et magnétiques des ondes incidente, réfléchie et transmise (toutes polarisées suivant $\overrightarrow{u_x}$).
3) Exprimer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de n_1 et n_2 grâce aux relations de passage. Commenter.
4) On définit les facteurs de réflexion R et de transmission T en énergie par :

$$R = \frac{\left\langle \vec{\Pi}_r(0,t)\right\rangle \bullet (-\vec{u}_z)}{\left\langle \vec{\Pi}_i(0,t)\right\rangle \bullet \vec{u}_z} \text{ et } T = \frac{\left\langle \vec{\Pi}_t(0,t)\right\rangle \bullet (\vec{u}_z)}{\left\langle \vec{\Pi}_i(0,t)\right\rangle \bullet \vec{u}_z} \text{ où } \vec{\Pi} \text{ est le vecteur de Poynting.}$$

Exprimer R et T en fonction de r, t, n_1 et n_2.

Quelle relation existe-t-il entre R et T ? Quel est son sens physique ?

Exercice 4*♥ : REFLEXION SUR UN MIROIR MOBILE - EFFET DOPPLER

Une surface parfaitement conductrice, plane et perpendiculaire à (Ox), se déplace à la vitesse uniforme $\vec{v} = v\overrightarrow{u_x}$ **;** elle coïncide ainsi à l'instant t avec le plan d'équation x=v.t.
Une onde électromagnétique dont le champ s'écrit $\vec{E}=E_0\cos(\omega(t-x/c))\overrightarrow{u_y}$ se réfléchit sur cette surface.

1) Chercher l'onde réfléchie sous la forme d'une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω' que l'on déterminera grâce aux relations de passage.
2) Exprimer la variation de fréquence Δf à la réflexion lorsque $v \ll c$.
   AN : $f=\omega/2\pi=5{,}00$GHz et $v=100\text{km.h}^{-1}$.

Exercice 5♥ :** ETUDE SIMPLIFIEE D'UN GUIDE D'ONDE

Deux plans métalliques parfaitement conducteurs placés en y=0 et y=L délimitent un « guide d'ondes » de longueur infinie suivant Oz, dans lequel règne le vide. On se propose d'étudier la propagation dans ce guide d'une onde électromagnétique dont le champ électrique s'écrit :
$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0\sin(k_y y)\exp\left(i(\omega t - k_z z)\right)\overrightarrow{u_x}$.

1) Donner les caractéristiques de cette onde électromagnétique dans le vide.
2) A quelle équation de propagation satisfait ce champ ? En déduire la relation de dispersion.
3) Montrer que l'on peut obtenir une telle onde en superposant deux ondes planes progressives obliques de vecteurs d'onde $\vec{k} = \mp k_y\overrightarrow{u_y} + k_z\overrightarrow{u_z}$.
4) En écrivant les conditions aux limites, montrer que k_y est quantifié et qu'il s'exprime en fonction de L et d'un entier n non nul. A chaque valeur de n correspond un mode de propagation. Décrire le type d'ondes auquel on aboutit.
5) Exprimer k_z en fonction de ω, c, n et L, et en déduire qu'il existe une fréquence de coupure $f_{c,n}$ (dépendant du mode) en dessous de laquelle il n'y a plus propagation.
   AN : Calculer L pour $f_{c,1}=2{,}5$GHz.
6) Pour le mode n, exprimer les vitesses de phase et de groupe de l'onde en fonction de c et du rapport $f_{c,n}/f$ (où f est la fréquence de l'onde).

Exercice 6* :** ONDE A LA SURFACE DE LA MER

La mer occupe le demi-espace z<0. Elle est assimilée à un milieu conducteur de conductivité γ, de permittivité relative ε_r. L'air occupe le demi-espace z>0, il a les mêmes propriétés électromagnétiques que le vide. On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dont on donne le champ magnétique :
- dans l'air : $\vec{B}_1 = f_1(z).e^{i(\omega.t-k1.x)}\,\vec{e}_y$.
- dans la mer : $\vec{B}_2 = f_2(z).e^{i(\omega.t-k2.x)}\,\vec{e}_y$

1) Etablir l'équation de propagation du champ magnétique dans chacun des deux milieux. En déduire les équations différentielles vérifiées par f_1 et f_2.
2) On pose $f_1(z) = A.e^{i\alpha z}$ et $f_2(z) = B.e^{i\beta z}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.
Déterminer les équations vérifiées par α et β.
Montrer, par des arguments énergétiques, que $\mathrm{Im}(\alpha) \geq 0$ et $\mathrm{Im}(\beta) \leq 0$.
3) En déduire les expressions des champs électriques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ associés.
4) Grâce aux conditions de passage des champs (dans ce modèle volumique il n'y a pas de courant surfacique), montrer que :
$A = B$, $k_1 = k_2$ et $\alpha(\varepsilon_r - i\mu_0\gamma c^2/\omega) = \beta$.

Exercice 7[**]** :** RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE DEMI-ONDE

Une antenne filiforme, colinéaire à l'axe Oz, de longueur $l=\lambda/2$, centrée à l'origine, est le siège d'un courant sinusoïdal d'intensité $\underline{I}(z,t)=I_0\cos(2\pi z/\lambda)\exp(i\omega t)$ avec $\omega=2\pi c/\lambda$.
Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques d'origine O, d'axe Oz.
On se place dans la zone de rayonnement $r \gg \lambda$.
On admet que le champ magnétique total rayonné en M par l'antenne est :

$$\underline{\vec{B}}(M,t) = i\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\exp\left(i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\overrightarrow{u_\varphi}$$

Et que localement ce champ électromagnétique a la structure d'une onde plane progressive.

1) Calculer la moyenne dans le temps du vecteur de Poynting en M.
2) Calculer la puissance moyenne P rayonnée par l'antenne à travers une sphère de rayon r.
   On donne $\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}d\theta = 1{,}22$.
   En déduire la résistance de rayonnement R de l'antenne définie par $P=RI_{eff}^2$. Calculer numériquement R. Quelle serait la valeur de l'intensité maximale I_0 pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est P=2100kW (puissance de l'émetteur Grandes Ondes de France Inter à Allouis)

Exercice 8[**♥]** :** CAVITE RESONANTE

Une cavité a la forme d'un parallélépipède rectangle dont les côtés Oa=a, OB=b, OC=c, sont portés par Ox, Oy, Oz , O étant un sommet.
Les parois de cette cavité sont délimitées par un métal parfait.
1) Trouver la relation liant k_1, k_2, k_3 et ω, pour que le champ électrique $\vec{E}$ de coordonnées :
$E_x = E_1.\cos(k_1.x+\varphi_1).\sin(k_2.y+\varphi_2).\ \sin(k_3.z+\varphi_3).e^{j\omega t}$
$E_y= E_2.\sin(k_1.x+\varphi_1).\cos(k_2.y+\varphi_2).\ \sin(k_3.z+\varphi_3).e^{j\omega t}$
$E_z = E_3.\sin(k_1.x+\varphi_1).\sin(k_2.y+\varphi_2).\ \cos(k_3.z+\varphi_3).e^{j\omega t}$
satisfasse à l'équation de propagation dans le vide (la relation de dispersion).
2) A partir des équations de Maxwell, établir une relation entre E_1, E_2, E_3, k_1, k_2, k_3.
3) Déterminer les valeurs possibles de ω pour que $\vec{E}$ satisfasse aux conditions aux limites. On exprimera ω en fonction des trois entiers n_1, n_2, n_3. On obtient ainsi les pulsations propres de la cavité.
4) Calculer la plus petite pulsation propre (a<b<c). AN : c=2*b=10cm.

Relations de passage :

On donne les relations de passage pour le champ électromagnétique à la traversée d'une interface entre deux milieux 1 et 2. La surface de séparation est éventuellement chargée avec une densité surfacique de charges $\boldsymbol{\sigma}$ et parcourue par un courant surfacique de densité $\vec{\boldsymbol{j}}_S$:

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{2\to 1}$$
$$\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{2\to 1}$$

Réponses :

Ex 1 : 1) $\vec{B} = \vec{0}$ 2) $\rho = k\varepsilon_0 E_0 sin(\omega t\text{-}kx)$ 2) $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}$ 4) $\vec{J} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

5) $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\vec{E}$ $\omega^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$ $v_g = 0$ 6) $\vec{R} = \vec{0}$

Ex 2 : 2) $\overrightarrow{J_S} = \frac{2E_0}{c\mu_0}\cos(\alpha)e^{j(\omega t - ksin(\alpha)y)}\overrightarrow{e_x}$ $\sigma = 0$

3) $d\vec{F} = -\frac{2{E_0}^2}{c^2\mu_0}cos^2(\alpha)cos^2(\omega t - ksin(\alpha)y)dS\overrightarrow{e_z}$ *a les caractéristiques d'une force de pression*

Ex 3 : 1) $k = n\omega/c$ 2) $\underline{\vec{E}_r} = \underline{r}E_0 e^{i(\omega t + k_1 z)}\vec{u}_x$ $\underline{\vec{E}_t} = \underline{t}E_0 e^{i(\omega t - k_2 z)}\vec{u}_x$ ...

3) $\underline{t} = \frac{2n_1}{n_1+n_2}$ $\underline{r} = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$ *commenter le signe de r*

4) $R = r^2 = \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2$ $T = \frac{n_2}{n_1}t^2$ $R + T = 1$ *conservation de l'énergie*

Ex 4 : 1) $\omega' = \omega\frac{1-v/c}{1+v/c}$ 2) $\Delta f = -\frac{2v}{c}f = -926$ Hz

Ex 5 : 2) *Equation de d'Alembert* $k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

4) *Par continuité de* $\vec{E}$ *(car il est tangentiel) :* $sin(k_y L)=0$ *donc* $k_y = n\pi/L$, $n \in \mathbb{N}^*$

5) $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - n^2\frac{\pi^2}{L^2}$ *propagation si* $f > f_c = n\frac{c}{2L}$ *AN :* $L = 6$ cm

6) $v_{\varphi,n} = \frac{c}{\sqrt{1-(f_{c,n}/f)^2}}$ $v_{g,n} = c\sqrt{1-(f_{c,n}/f)^2}$

Ex 6 : 1) *Dans l'air* $\vec{\Delta}\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$ *d'où* $f_1'' + (\omega^2/c^2 - k_1^2)f_1 = 0$

Dans la mer $\vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$ *d'où* $f_2'' + (\varepsilon_r\omega^2/c^2 - j\omega\mu_0\gamma - k_2^2)f_2 = 0$

2) $\alpha^2 = \omega^2/c^2 - k_1^2$ $\beta^2 = \varepsilon_r\omega^2/c^2 - j\omega\mu_0\gamma - k_2^2$

…

Ex 7 : 1) $\langle\vec{R}\rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c}{8\pi^2 r^2}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}cos\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2\vec{u}_r$

2) $P = 1{,}22\frac{\mu_0 I_0^2 c}{4\pi}$ $R = 1{,}22\frac{\mu_0 c}{2\pi} = 73{,}2\ \Omega$ *Pour* $P=2100$ kW, $I_0 = 240$ A

Ex 8 : 1) $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \omega^2/c^2$ 2) $k_1E_1 + k_2E_2 + k_3E_3 = 0$

3) $\omega = \pi c\sqrt{\left(\frac{n_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{c}\right)^2}$ 4) $\omega_{min} = \pi c\sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2} = 2{,}1.10^{10}$ rad.s^{-1}