

DS4 de Physique du 6/12/25

Durée 4h

Calculatrices autorisées

Rappel des consignes :

Présentation de la copie :

- ***Laisser une marge à gauche pour la notation et quelques lignes en début de copie pour l'appréciation et les remarques.***
- *Encadrer ou souligner les résultats.*
- *Donner le numéro complet de la question à laquelle vous répondez.*

Rédaction :

- *Répondre précisément aux questions posées*
- *Respecter les notations de l'énoncé.*
- *Ne pas utiliser d'abréviations (sauf si elles ont été définies)*
- *Justifier tous les résultats.*
- *Rédiger de façon claire, précise et concise.*
- *Citer le nom des lois utilisées.*
- *Toujours donner un résultat littéral (avant de faire éventuellement l'application numérique), sans application numérique intermédiaire, sans mélanger littéral et numérique.*
- *Contrôler l'homogénéité du résultat.*

Applications numériques :

- *Donner un nombre raisonnable de chiffres significatifs.*
- *Arrondir correctement la valeur donnée par la calculatrice.*
- *Ne jamais oublier les unités.*
- *Contrôler que l'ordre de grandeur est raisonnable.*
- *Ne jamais réutiliser le résultat arrondi d'une application numérique précédente (pour éviter les erreurs d'arrondis)*

La notation prendra en compte le respect de ces consignes (aucun point pour un résultat non homogène, des points de rédaction...)

Problème 1 : Plaque à induction

Dans une plaque à induction, une bobine est placée sous une plaque en vitrocéramique. Lorsque cette bobine est parcourue par un courant électrique alternatif, un champ magnétique variable induit un champ électrique qui entraîne la circulation de courants électriques dans le métal du récipient posé sur la plaque. Ces courants électriques, appelés « courants de Foucault », génèrent de l'énergie thermique par effet Joule.

Nous nous intéresserons tour à tour au champ magnétique créé par un fil rectiligne de longueur infinie, puis par une spire circulaire. Ensuite, nous nous intéresserons au phénomène d'induction dans le fond de la casserole et à l'effet Joule associé.



Figure 1 - Plaque à induction

Source : *La physique par les objets quotidiens* – Cédric Ray et Jean-Claude Poizat

Données – Problème 1

Conductivité thermique de l'acier : $\lambda = 16 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Capacité thermique massique de l'acier : $c = 1,0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Masse volumique de l'acier : $\rho = 8\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \vec{\Delta}(\vec{A})$$

1 - Théorème d'Ampère

Q1. A partir d'une équation de Maxwell, démontrer le théorème d'Ampère dans le cadre de la magnétostatique ou des régimes lentement variables. Vous préciserez sur un schéma les conventions d'orientation des surfaces et contours utilisés.

2 - Champ magnétique créé par un fil rectiligne de longueur infinie

Soit un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant électrique d'intensité I et placé dans le vide. L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On considère que, dans l'hypothèse de régimes lentement variables, le cas d'un courant d'intensité variable au cours du temps est assimilable au cas d'un courant d'intensité constante.

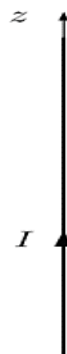


Figure 2 - Fil infini parcouru par un courant électrique d'intensité I

Q2. Etablir l'expression du champ magnétique créé par ce fil à une distance r du fil.

3 - Champ magnétique créé par une spire

Soit une spire circulaire de rayon R , de centre O , parcourue par un courant d'intensité I . On considère ici encore que, dans l'hypothèse de régimes lentement variables, le cas d'un courant d'intensité variable au cours du temps est assimilable au cas d'un courant d'intensité constante. Soit un point M situé sur l'axe de la spire, de coordonnée z et tel que du point M la spire soit vue sous l'angle α .

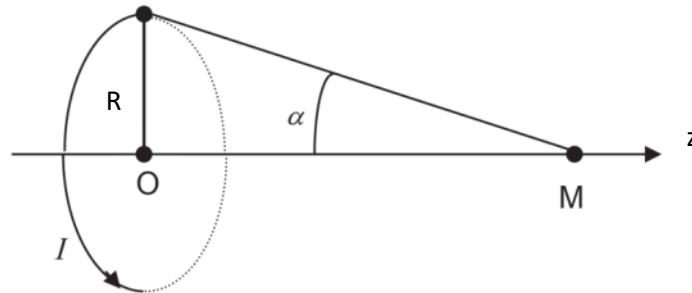


Figure 3 - Spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I

Q3. En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution de courant, déterminer la direction du champ magnétique créé par cette spire au point M de l'axe (Oz).

Pour un point M en dehors de l'axe, justifier que $\vec{B} = B_r(r, z)\vec{u}_r + B_z(r, z)\vec{u}_z$.

Le champ magnétique créé en un point M de l'axe de la spire est donné par l'expression :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) = B_0 \sin^3(\alpha)$$

où α représente l'angle sous lequel la spire est vue depuis le point M et $B_0 = \mu_0 I / 2R$.

Q4. Établir l'expression de B au point M en fonction de B_0 , R et de z , z représentant la distance entre le point O et le point M . Pour des distances z petites par rapport au rayon de la spire, par un développement limité, montrer que l'expression du champ B au point M est donnée par :

$$B = B_0 \left(1 + k \frac{z^2}{R^2} \right) \text{ avec } k \text{ une constante à déterminer.}$$

Q5. Quelle valeur maximale de z permet de considérer que le champ B est égal à B_0 , (à 10 % près) ? On exprimera z_{max} en fonction de R .

On se propose de montrer que si l'on reste au voisinage de l'axe, la composante radiale du champ peut être négligée devant sa composante axiale.

En calculant le flux du champ magnétique à travers un petit cylindre d'axe (Oz), de longueur dz et de rayon r , on peut montrer que (la démonstration n'est pas demandée ici, question supprimée) :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}(0, z).$$

Q6. Déterminer la condition sur r pour que la composante radiale soit 10 fois plus petite que la composante axiale en $z = R/4$.

4 - Modèle simplifié de plaque à induction

Une plaque à induction comporte une bobine (P) de rayon r_1 permettant de créer un champ magnétique. La bobine (P) est parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et de fréquence $f = 20$ kHz. On modélise la casserole métallique posée sur la plaque par une spire (S) circulaire de rayon $r_2 < r_1$. Elle est parcourue par un courant d'intensité $i(t)$. Les sens des courants sont arbitrairement ceux mentionnés sur la **figure 4**.

On considère les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la casserole posée sur la plaque à induction est à une distance z_0 de la bobine ;
- le champ magnétique auquel est soumis la casserole est uniforme et son expression est donnée par : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ où B_0 est une constante ;
- la spire (S) a une résistance électrique R_e et son inductance propre est négligée.

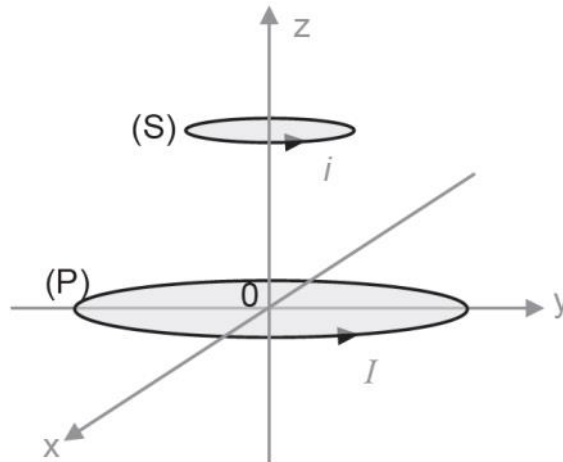


Figure 4 - Représentation de la bobine (P) et de la spire (S)

- Q7.** Déterminer l'expression de la force électromotrice induite e et du courant induit i apparaissant dans la spire (S).
- Q8.** Déterminer l'expression de la puissance moyenne P_{moy} dissipée par effet Joule dans la spire (S) en fonction de B_0 , ω , R_e et r_2 .
- Q9.** Déterminer l'ordre de grandeur des longueurs que r_1 , r_2 et z_0 ne doivent pas dépasser pour permettre de considérer que l'approximation des régimes quasi-stationnaires est justifiée. Commenter.

5 - Deuxième modèle de plaque à induction

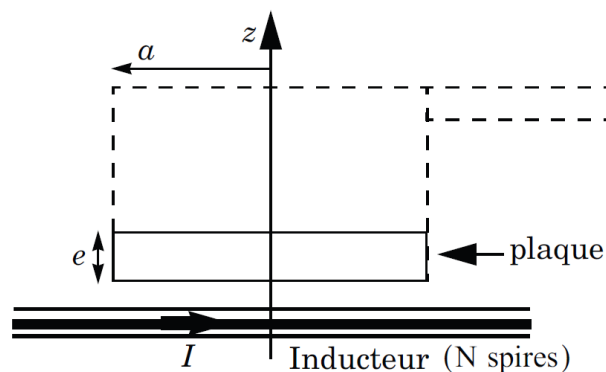
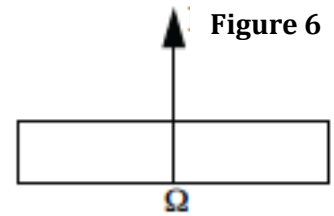


Figure 5 - Représentation de la plaque à induction (inducteur) et de la casserole (dont le fond est une plaque métallique)

On ne prendra en compte que le fond de l'ustensile de cuisine qu'on assimilera à une plaque métallique cylindrique de rayon a , d'épaisseur e . Cette plaque est posée au-dessus de l'inducteur (voir figure 5).

On supposera pour simplifier que l'inducteur est une bobine plate constituée de N spires de rayons voisins pris tous égaux à R , chacune parcourue par un courant I . Compte tenu des ordres de grandeur calculés en partie 3, on supposera que l'on s'est placé dans des conditions telles que le champ magnétique créé par l'inducteur au niveau de la base inférieure de la plaque *avant qu'on ne mette la plaque*, peut être considéré comme uniforme, égal à celui que créeraient les spires en leur centre. Étant constituée d'acier magnétique, la plaque s'aimante et modifie à son tour le champ magnétique dans le vide.



Dans toute cette partie, on prendra comme origine de l'axe des z , le point Ω centre de la base inférieure de la plaque (voir figure 6) et on se placera en coordonnées cylindriques.

La plaque (le fond de la casserole) est constituée d'acier magnétique de conductivité électrique σ . On supposera ici que cet acier est un milieu magnétique linéaire, homogène et isotrope de perméabilité $\mu = \mu_r \mu_0$, c'est à dire que les équations de Maxwell dans ce milieu s'écrivent :

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad [M.1] \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad [M.2]$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad [M.3] \quad \text{rot} \vec{B} = \mu \vec{j} + \epsilon_0 \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad [M.4]$$

On supposera en outre que la loi d'Ohm est valable dans l'acier pour tout le problème et que la valeur élevée de la conductivité σ de l'acier permet de négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction dans l'équation de Maxwell-Ampère.

Données :

$$N = 10 ; R = 16,0 \text{ cm} ; a = 4,0 \text{ cm} ; e = 5,0 \text{ mm} ; I = 5,0 \text{ A} ;$$

$$\sigma = 5,0 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} ; \mu_r = 100 ; f = 20 \text{ kHz} ; \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} ; \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$$

Q10. Montrer que dans la plaque le vecteur densité volumique de courant vérifie l'équation :

$$\vec{\Delta}(\vec{j}) = K \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \text{ avec } K \text{ une constante à exprimer en fonction de } \mu \text{ et } \sigma$$

Ce vecteur densité volumique de courant représente les courants de Foucault qui apparaissent dans la plaque par induction. Par résolution de l'équation précédente en coordonnées cylindriques d'origine Ω avec des conditions aux limites adaptées, on peut montrer que

$$\vec{j} = \frac{\mu_r \sigma \omega N B_0}{2} r e^{-z/\delta} \sin(\omega t - \frac{z}{\delta}) \vec{u}_\theta \text{ avec } \delta = \sqrt{2/\mu \sigma \omega}$$

Q11. Expliquer ce que représente δ et comparer sa valeur à l'épaisseur du fond de la casserole e .

Q12. Écrire l'expression de la puissance volumique $p_v(r, z, t)$ dissipée par effet Joule en tout point de la plaque par les courants induits et expliciter sa moyenne temporelle, notée $\langle p_v \rangle$.

Q13. Déterminer l'expression littérale de la puissance moyenne totale P dissipée par effet Joule dans la plaque en fonction de B_0 , μ_r , σ , ω , δ , N le nombre de spires de l'inducteur et a le rayon de la casserole.

Q14. Montrer que le modèle explique pourquoi dans la cuisine par induction, on choisit une fréquence de 20 kW plutôt que le 50 Hz directement accessible.

Q15. Pourquoi dans la cuisine par induction, a-t-on intérêt à utiliser un matériau conducteur magnétique plutôt que non magnétique ?

Q16. Calculer numériquement P . Commenter, sachant que les puissances commerciales affichées sont de l'ordre du kW.

Problème 2 : Le gecko

Données

- Opérateur gradient d'un champ scalaire U :
 - $\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes
 - $\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques
 - $\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$ en coordonnées sphériques
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Constante de Stefan : $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
- Intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Viscosité dynamique de l'eau à 20 °C sous 1 bar : $\eta_e = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- Coefficient de tension superficielle de l'interface eau/air à 20 °C : $\gamma_e = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
- Définition du debye (D) : $1 \text{ D} = 3,33 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$

Source : Autumn K., L'inusable adhésif des pattes du gecko, *Pour la Science*, n° 343, 2006, p. 82-88.

Le gecko est un petit lézard capable de se déplacer à des vitesses de plusieurs mètres par seconde sur les murs ou les plafonds de pratiquement toutes natures, dans presque toutes les conditions. Des expériences menées en 2002 par l'équipe de l'américain Kellar Autumn ont montré que la spectaculaire faculté d'adhésion de l'animal est uniquement due à des forces de Van der Waals. L'adhésion est possible grâce à l'anatomie particulière des coussinets des doigts du lézard. Ces derniers sont recouverts de poils microscopiques, les sétules, ramifiés en des centaines de branches terminées par une spatule pouvant s'approcher à quelques nanomètres de la surface de contact.

I - Interactions entre molécules polaires

On considère une molécule polaire située dans le vide, modélisée par un dipôle électrique rigide de moment dipolaire électrique permanent $\vec{p}_1 = p_1 \vec{u}_z$. Le dipôle, centré en un point O , est constitué de deux charges ponctuelles opposées, $+q$ et $-q$ (avec $q > 0$), situées sur l'axe $(O, \vec{u}_z)$ aux points respectifs P et N distants de $a = PN$ (**figure 1**). On repère tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

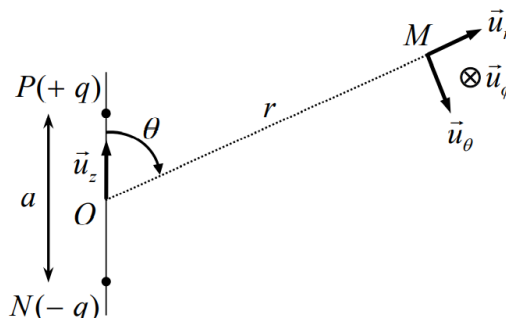


Figure 1 - Dipôle électrique centré en un point O

- Q1.** Expliquer, en prenant l'exemple de la molécule de chlorure d'hydrogène (HCl), l'origine du moment dipolaire permanent de certaines molécules. Donner l'expression en fonction de a et q du moment dipolaire électrique $\vec{p}_1$ de la molécule polaire.
- Q2.** Établir l'expression du potentiel électrostatique $V_1(M)$ créé en M par la molécule polaire dans le cadre de l'approximation dipolaire qu'on explicitera. On donnera le résultat en fonction de p_1 , ϵ_0 et des coordonnées sphériques du point M .
- Q3.** En déduire que le champ électrostatique $\vec{E}_1(M)$ créé en M par la molécule polaire s'écrit en coordonnées sphériques : $\vec{E}_1(M) = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos(\theta)\vec{u}_r + \sin(\theta)\vec{u}_\theta)$.

Une seconde molécule polaire, modélisée par un dipôle rigide de moment dipolaire électrique permanent $\vec{p}_2$, est située au point M sur l'axe $(O, \vec{u}_z)$ tel que $\theta = 0$, à la distance r fixe du point O . À un instant donné, son moment dipolaire forme un angle α avec cet axe (**figure 2**). Dans ces conditions, la molécule plongée dans le champ électrostatique dû à l'autre molécule située au point O subit un couple de forces de moment : $\vec{\Gamma} = \vec{p}_2 \wedge \vec{E}_1(M)$. On rappelle l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules : $\mathcal{E}_{12} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(M)$.

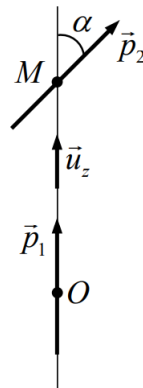


Figure 2 - Interaction entre deux molécules polaires

- Q4.** Quel est l'effet du couple de forces subi par la molécule fixée au point M ? Justifier l'orientation de son moment dipolaire électrique lorsqu'elle est en équilibre stable.

Les deux molécules sont supposées identiques, de moments dipolaires électriques de même valeur $p_1 = p_2 = p = 1 \text{ D}$.

- Q5.** Estimer l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules, distantes de $r = 0,5 \text{ nm}$, en supposant leurs moments dipolaires électriques alignés. Comparer cette énergie à l'énergie d'agitation thermique qui est de l'ordre de $k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann, à la température ambiante $T = 293 \text{ K}$. Conclure.

- Q6.** Du fait de l'agitation thermique, on doit considérer l'énergie potentielle d'interaction moyenne entre deux dipôles situés à une distance r dont les orientations relatives sont sujettes à des variations aléatoires. À température suffisamment élevée, on montre que cette énergie potentielle d'interaction moyenne est de la forme : $\langle \mathcal{E}_{12} \rangle = - \frac{C_K}{r^6}$ où

$$C_K = \frac{1}{k_B T} \left(\frac{p^2}{2\pi\epsilon_0} \right)^2.$$

Donner un ordre de grandeur de C_K à la température ambiante $T = 293 \text{ K}$. Vérifier que la force $\vec{F}_{1/2}$ qui dérive de cette énergie potentielle est attractive. On rappelle que $\vec{F}_{1/2} = - \overrightarrow{\text{grad}} \langle \mathcal{E}_{12} \rangle$.

II - Calcul de la force d'adhérence du gecko au plafond

La force, calculée à la question précédente, correspond à une interaction de Van der Waals entre molécules polaires. Si on considère maintenant deux plans infinis parallèles, distants de D et séparant chacun un milieu solide (**figure 3**), on montre en prenant en compte l'ensemble des interactions de Van der Waals que la force surfacique entre les deux milieux s'écrit : $f(D) = \frac{A}{6\pi D^3}$.

La constante A , appelée constante de Hamaker, dépend de la nature des interactions de Van der Waals et des densités moléculaires des deux solides en interaction.

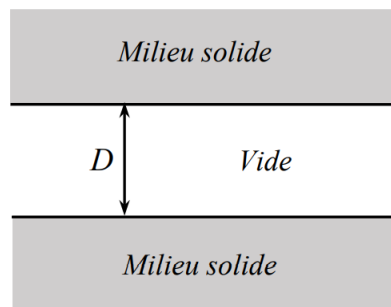


Figure 3 - Deux milieux plans infinis en interaction

- Q7.** Vérifier que la constante de Hamaker A est homogène à une énergie.
- Q8.** Un gecko de masse $m = 50 \text{ g}$ est suspendu par ses quatre pattes au plafond. Le gecko possède au total 6 millions de sétules, comportant chacune en moyenne 500 spatules. En modélisant une spatule par une surface carrée de $0,2 \mu\text{m}$ de côté située à une distance $D = 1 \text{ nm}$ du plafond, estimer le pourcentage de sétules utilisées par le gecko pour soutenir sa masse. On prendra $A = 10^{-19} \text{ J}$ et on négligera tout effet de bord.

Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a constaté qu'un gecko de 50 g utilise à son maximum d'adhérence uniquement $0,04 \%$ de ses sétules pour soutenir sa masse, peut-on bien imputer les facultés d'adhérence du gecko aux interactions de Van der Waals ?

Problème 3 : La diode à vide

Données et formulaire pour cette partie :

Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

- Pour un champ scalaire a , $\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}} a) = \vec{0}$.
- Pour un champ scalaire a , $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} a) = \Delta a$.
- Pour un champ scalaire a , à dépendance spatiale uniquement radiale en coordonnées cylindriques :

$$\Delta a(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a(r) \right).$$

Ce sujet a trait aux tubes à vide (figure 1a), longtemps utilisés pour construire des équipements électriques avant l'apparition des composants à base de matériaux semi-conducteurs. Les ordinateurs de la première génération des ordinateurs modernes étaient construits avec des tubes (environ 19 000 pour l'ENIAC!). De nos jours, les tubes à vide sont encore utilisés dans certains équipements audio (figure 1b) et pour certaines applications de forte puissance. Les principaux inconvénients des tubes à vide sont leur encombrement, leur fragilité et la nécessité d'une tension d'alimentation élevée (quelques centaines de volts).

Aucune connaissance préalable sur les tubes à vide n'est requise pour traiter le questionnement.



(a) Le tube ECC83.
Source : Wikipédia.



(b) Amplificateur audio à tubes.
Source : catalogue Auna.

Figure 1 – Tubes à vide.

Les tubes à vide sont classés selon le nombre d'électrodes qu'ils possèdent : diode (2 électrodes), triode (3 électrodes), tétrode (4 électrodes) et pentode (5 électrodes). La triode ECC83 (voir figure 1a) est le composant étudié dans ce sujet.

La figure 2 montre la constitution simplifiée d'une triode et le symbole électrique associé. Les électrodes de la triode s'appellent la cathode, l'anode et la grille. De plus, un filament dans lequel circule un courant continu chauffe la cathode. La présence de ce filament fait que ce tube est souvent nommé improprement *lampe*.

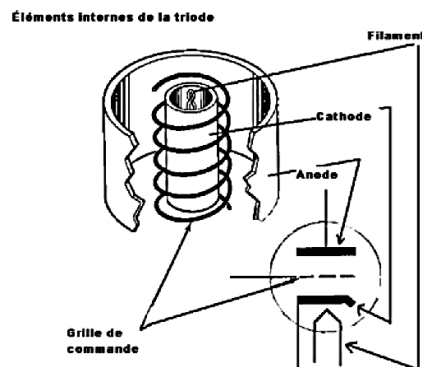


Figure 2 – Lien entre constitution et symbole électrique.
Source : Wikipédia.

Dans le tube de référence ECC83, la cathode est cylindrique de rayon $r_1 = 2,0 \text{ mm}$ et l'anode cylindrique de rayon $r_2 = 5,0 \text{ mm}$. Elles sont coaxiales, d'axe (Oz) , et toutes deux de hauteur $H = 45 \text{ mm}$. L'ensemble est enfermé dans une enveloppe de verre et sous vide hors fonctionnement.

Dans cette première partie, la grille est ignorée. La triode ne fonctionne qu'avec sa cathode et son anode : il s'agit donc d'une diode. La cathode, chauffée par le filament, est le siège d'une émission d'électrons appelée émission thermoïonique. **Par hypothèse, ces électrons ne possèdent pas de vitesse initiale et leur nombre dépend de la température T de la cathode.** L'anode est portée au potentiel $V_a > 0$ par rapport à la cathode de potentiel nul par choix ($V_c = 0$). Sous l'influence du champ électrique régnant entre cathode et anode, les électrons peuvent rejoindre l'anode et ainsi créer un courant électrique I_a circulant depuis l'anode vers la cathode. On rappelle que la tension d'alimentation de la diode peut atteindre la centaine de volts.

I – Caractéristique $I_a(U_{ac})$ de la diode

Dans cette section, on cherche, **en régime stationnaire**, la caractéristique $I_a(U_{ac})$ de la diode à vide, dont le symbole électrique est rappelé à la figure 3. I_a représente le courant anodique, fléché (positif) entrant par l'anode (et donc sortant par la cathode) et U_{ac} est la tension anode - cathode.

On note ρ la densité volumique de charge électrique, *a priori* non uniforme, régnant dans l'espace entre anode et cathode et V le potentiel électrostatique. On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe (Oz) étant confondu avec l'axe des cylindres anodique et cathodique.

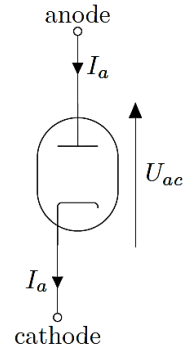


Figure 3 – Diode à vide : symbole et fléchage des grandeurs électriques associées.

Q1. Rappeler les équations de Maxwell en régime stationnaire. Justifier l'existence du potentiel électrostatique V et établir la relation qui lie V à ρ . Donner le nom de cette relation.

Les effets de bord sont négligés et on considère que le potentiel V admet pour dépendance spatiale uniquement la coordonnée radiale r .

Q2. Proposer des éléments de justification de ces choix.

Q3. Évaluer, en ordre de grandeur, le poids d'un électron et la force électrostatique subie par un électron circulant depuis la cathode vers l'anode. Conclure.

Q4. Traduire la conservation de l'énergie mécanique d'un électron circulant depuis la cathode vers l'anode pour en déduire la vitesse $v(r)$ d'un électron à la distance r de l'axe en fonction, notamment, du potentiel électrique $V(r)$.

Q5. Rappeler l'équation locale de conservation de la charge en régime quelconque. En déduire, pour le régime stationnaire d'étude, une propriété vérifiée par le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$. Établir la relation qui existe en conséquence entre r , H , $\rho(r)$, $v(r)$ et le courant électrique anodique I_a .

Q6. À l'aide des relations précédentes, montrer que le potentiel V est solution de la relation suivante en précisant l'expression du facteur k :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = k V^{-\frac{1}{2}}$$

Q7. Vérifier la cohérence de l'unité du facteur k . (Trouver l'unité de k par deux méthodes et vérifier la cohérence)

L'équation différentielle obtenue à la question **Q6** ne possède pas de solution analytique simple vérifiant les conditions aux limites imposées ici. Seule une solution approchée est recherchée dans le cadre de ce sujet.

Q8. Déterminer par quels facteurs sont multipliés ρ , v et I_a si le potentiel de l'anode V_a est multiplié par un facteur N .

Le résultat précédent et la forme du second membre de l'équation différentielle suggèrent une solution pour cette dernière sous la forme d'une loi puissance de type $V(r) = \alpha r^n$.

Q9. Déterminer le système d'équations dont α et n sont solutions. En déduire la valeur de n et l'expression de α en fonction de k .

La forme de la solution utilisée ne permet pas de vérifier la condition imposée à la cathode : $V(r = r_1) = 0$. On choisit d'adopter pour la suite la solution approchée $V(r) = \alpha (r - r_1)^n$ qui vérifie cette condition, tout en conservant les expressions précédentes des constantes α et n .

Q10. Exprimer $U_{ac} = V(r_2) - V(r_1)$ en fonction de I_a et des autres paramètres utiles. En déduire que la relation caractéristique de la diode $I_a(U_{ac})$ s'écrit $I_a(U_{ac}) = \beta U_{ac}^{\frac{3}{2}}$ et préciser l'expression de β en fonction de ε_0 , H , r_1 , r_2 , e et m . Déterminer la valeur numérique de β .

Q11. Expliquer pourquoi le résultat précédent n'est pas valable dans le cas $U_{ac} < 0$. Préciser ce qu'il se passe dans ce cas et indiquer la valeur de I_a correspondante.

Q12. Tracer la caractéristique $I_a(U_{ac})$.

On appelle « polariser une diode » l'action de choisir un point de fonctionnement pour celle-ci, c'est-à-dire choisir un couple de valeurs (I_a, U_{ac}) que l'on note (I_a^0, U_{ac}^0) . Pour le tube ECC83, le point de fonctionnement optimal préconisé par le constructeur correspond à l'intensité $I_a = I_a^0 = 1,2 \text{ mA}$.

Q13. Déterminer la valeur U_{ac}^0 telle que $I_a^0 = 1,2 \text{ mA}$.

II – Caractéristiques dynamiques de la diode

Q14. Pour $I_a^0 = 1,2 \text{ mA}$, déterminer le temps de vol τ d'un électron entre la cathode et l'anode. En déduire, par analyse dimensionnelle, une expression et une estimation de la fréquence de coupure de la diode.

Si la tension U_{ac} varie légèrement de la quantité δu , cela engendre une légère variation de courant δi sur I_a . Ces variations sont, à l'ordre 1, proportionnelles entre elles et définissent la résistance dynamique de la diode $r_d = \frac{\delta u}{\delta i}$.

Q15. Exprimer la résistance dynamique r_d de la diode en fonction de β et I_a . Faire l'application numérique pour la valeur $I_a^0 = 1,2 \text{ mA}$ de I_a .

III – Polarisation de la diode

Pour polariser le tube ECC83 au point de fonctionnement souhaité, d'intensité $I_a^0 = 1,2 \text{ mA}$, un générateur de tension continue $V_{cc} = 10 \text{ V}$ et une résistance R_a sont utilisés comme illustré sur le circuit de la figure 4 (le circuit de chauffage de la cathode est non représenté). On admet à présent que la diode est caractérisée par la loi $I_a = \beta U_{ac}^{\frac{3}{2}}$ avec $\beta = 2,2 \times 10^{-4} \text{ USI}$ (unité du système international).

Q16. Écrire la relation entre I_a et U_{ac} , appelée droite de charge, imposée dans la maille où la diode se trouve.

Q17. Déterminer la valeur de R_a pour avoir $I_a^0 = 1,2 \text{ mA}$.

Q18. Reproduire sur la copie la figure 5, puis y reporter la droite de charge de la question **Q16**, ainsi que la caractéristique $I_a(U_{ac})$ de la diode. Ajouter également sur celle-ci les grandeurs précédemment introduites I_a^0 et δi (relative à δu). Indiquer aussi la signification de la pente de la caractéristique de la diode au point de fonctionnement.

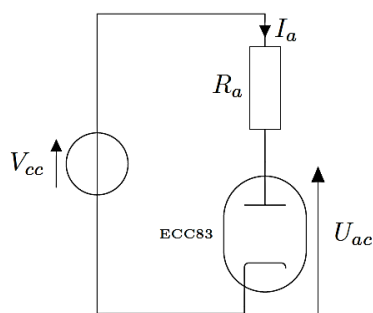


Figure 4 – Circuit de polarisation de la diode.

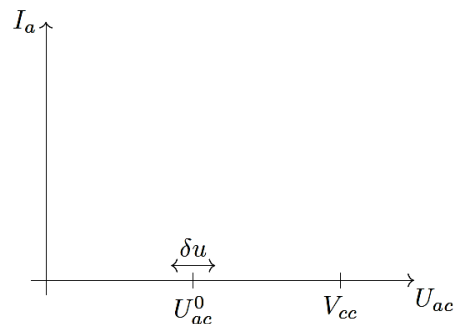


Figure 5 – Graphe schématique (pas à l'échelle) à reproduire et compléter.