ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°54

Exercice 1 (**)

Soit E préhilbertien et p, q des projecteurs orthogonaux. Montrer

$$p \circ q = 0 \iff q \circ p = 0$$

Corrigé : Comme p et q sont projecteurs orthogonaux, on a

$$\mathrm{E} = \mathrm{Im}\ p \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\ p \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \mathrm{Im}\ q \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\ q$$

Puis $$p \circ q = 0 \iff \mathrm{Im}\ q \subset \mathrm{Ker}\ p \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ker}\ p^{\perp} \subset \mathrm{Im}\ q^{\perp}$$

D'où $$p \circ q = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Im}\ p \subset \mathrm{Ker}\ q \quad \Longrightarrow \quad q \circ p = 0$$

L'autre sens vient par symétrie des rôles et on conclut

$$\boxed{p \circ q = 0 \iff q \circ p = 0}$$

Variante : On a $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$ pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ et de même pour q. Supposons $p \circ q = 0$. Pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, on a

$$\langle p \circ q(x), y\rangle = \langle p \circ q(x), p(y)\rangle = \langle q(x), p(y)\rangle = \langle q(x), q \circ p(y)\rangle = 0_{\mathrm{E}}$$

En particulier, en choisissant $x = p(y)$ pour $y \in \mathrm{E}$, on trouve $\|q \circ p(y)\|^2 = 0$ d'où $q \circ p = 0$ et on complète par symétrie des rôles.

Exercice 2 (**)

Soit E euclidien et p, q des projecteurs orthogonaux. Montrer

$$\mathrm{Im}\ p \subset \mathrm{Im}\ q \iff \forall x \in \mathrm{E} \qquad \|p(x)\| \leqslant \|q(x)\|$$

Corrigé : Supposons $\|p(x)\| \leqslant \|q(x)\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Il en résulte que $\mathrm{Ker}\ q \subset \mathrm{Ker}\ p$ et par suite

$$\mathrm{Im}\ p = (\mathrm{Ker}\ p)^{\perp} \subset (\mathrm{Ker}\ q)^{\perp} = \mathrm{Im}\ p$$

Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}\ p \subset \mathrm{Im}\ q$. On a $\mathrm{Ker}\ q = (\mathrm{Im}\ q)^{\perp} \subset (\mathrm{Im}\ p)^{\perp} = \mathrm{Ker}\ p$. Soit $x \in \mathrm{E}$. On observe que

$$q(x) = p(x) + q(x) - p(x) \quad \text{et} \quad q(x) - p(x) = \underbrace{q(x) - x}_{\in \mathrm{Ker}\ q} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}\ p} \in \mathrm{Ker}\ p$$

D'après le théorème de Pythagore

$$\|q(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|q(x) - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{Im}\ p \subset \mathrm{Im}\ q \iff \forall x \in \mathrm{E} \qquad \|p(x)\| \leqslant \|q(x)\|}$$

Exercice 3 (**)

Soit E euclidien avec $\dim \mathrm{E} = n \geqslant 2$ et (u, v) une famille libre de vecteurs de E. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \langle u, x\rangle v + \langle v, x\rangle u$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f possède $n-2$ colonnes nulles.
3. En déduire les valeurs propres de f.
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Corrigé : 1. L'application f est à valeurs dans E et linéaire par linéarité du produit scalaire en la deuxième variable et linéarité du produit. Ainsi

$$\boxed{f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})}$$

2. On a $\mathrm{E} = \mathrm{F} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{F}^{\perp}$ avec $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u, v)$. Soit $(e_3, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{F}^{\perp}$. Ainsi, la famille $\mathscr{B} = (u, v, e_3, \ldots, e_n)$ est une base de E et on a

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} \langle u, v\rangle & \|v\|^2 \\ \|u\|^2 & \langle u, v\rangle \end{pmatrix}, 0\right]}$$

3. On a
$$\begin{aligned} \chi_f(\mathrm{X}) &= \mathrm{X}^{n-2}\left[(\mathrm{X} - \langle u, v\rangle)^2 - (\|u\|\|v\|)^2\right] \\ &= \mathrm{X}^{n-2}\left(\mathrm{X} - \langle u, v\rangle - \|u\|\|v\|\right)\left(\mathrm{X} - \langle u, v\rangle + \|u\|\|v\|\right) \end{aligned}$$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(f) = \{0, \langle u, v\rangle + \|u\|\|v\|, \langle u, v\rangle - \|u\|\|v\|\}}$$

4. Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'étant pas réalisé, on a

$$\langle u, v\rangle \neq \pm\, \|u\|\|v\|$$

d'où $\mathrm{Card}\,\mathrm{Sp}\,(f) = 3$. Par suite

$$\dim \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)} \mathrm{E}_\lambda(f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)} \dim \mathrm{E}_\lambda(f) \geqslant n - 2 + 1 + 1 = \dim \mathrm{E}$$

d'où
$$\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)} \mathrm{E}_\lambda(f)$$

Ainsi
$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable.}}$$

Variante : Soit $\mathscr{L}$ une base orthonormée de E. Notons $\mathrm{U} = \mathrm{mat}_{\mathscr{L}} u$, $\mathrm{V} = \mathrm{mat}_{\mathscr{L}} v$ et $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathscr{L}} x$ pour $x \in \mathrm{E}$. Par associativité, on trouve

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{L}} f(x) = (\mathrm{U}^\top \mathrm{X})\mathrm{V} + (\mathrm{V}^\top \mathrm{X})\mathrm{U} = (\mathrm{V}\mathrm{U}^\top + \mathrm{U}\mathrm{V}^\top)\mathrm{X}$$

d'où
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{L}} f = \mathrm{V}\mathrm{U}^\top + \mathrm{U}\mathrm{V}^\top \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$$

D'après le théorème spectral, il en résulte que f est diagonalisable.

Exercice 4 (***)

Soit E euclidien. Montrer que $\{(x,y) \in \mathrm{E}^2 \mid (x,y) \text{ libre}\}$ est un ouvert de E^2.

Corrigé : On note $\mathrm{E}^2 \setminus \mathrm{U} = \{(x,y) \in \mathrm{E}^2 \mid (x,y) \text{ libre}\}$. D'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathrm{U} = \{(x,y) \in \mathrm{E}^2 \mid \|x\|\|y\| - |\langle x,y\rangle| = 0\}$$

On pose
$$f\colon \begin{cases} \mathrm{E}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \|x\|\|y\| - |\langle x,y\rangle| \end{cases}$$

L'application $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ est bilinéaire sur un produit d'espaces de dimension finie et est donc continue d'où la continuité de $(x,y) \mapsto |\langle x,y\rangle|$ par composition avec la valeur absolue. Les applications $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto y$ et $\|\cdot\|$ sont continues d'où la continuité de $(x,y) \mapsto \|x\|$ et $(x,y) \mapsto \|y\|$ et $(u,v) \mapsto uv$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ d'où, par composition, la continuité de $(x,y) \mapsto \|x\|\|y\|$. Ainsi, l'application f est continue et on a $\mathrm{E}^2 \setminus \mathrm{U} = f^{-1}(\{0\})$ qui est fermé comme image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble U est un ouvert de } \mathrm{E}^2.}$$

Exercice 5 (***)

Soit E préhilbertien et p, q des projecteurs orthogonaux. Montrer que les valeurs propres de $p \circ q$ sont dans $[\,0\,;1\,]$.

Corrigé : Pour p projecteur orthogonal, on a pour $(x,y) \in \mathrm{E}^2$

$$\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle + \langle \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p}, \underbrace{y - p(y)}_{\in \operatorname{Ker} p}\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$$

Soit λ valeur propre de $p \circ q$ et x vecteur propre associé. Supposons $\lambda \neq 0$ sinon il n'y a rien à faire. On a $x = \dfrac{1}{\lambda} p \circ q(x) \in \operatorname{Im} p$. Soit $t \in \mathrm{E}$ tel que $x = p(t)$. Il vient en exploitant la relation précédente avec p puis q

$$\lambda \|x\|^2 = \langle p \circ q(x), x\rangle = \langle p \circ q \circ p(t), p(t)\rangle = \langle q(p(t)), p(t)\rangle = \langle q(p(t)), q(p(t))\rangle \geqslant 0$$

Comme p et q sont 1-lispchitziens, on a clairement $\lambda \leqslant 1$ et on conclut

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } p \circ q \text{ sont dans } [\,0\,;1\,].}$$

A SIMPLIFIER EN X=P(X)

Exercice 6 (***)

Soit E euclidien, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

1. Montrer que $\quad \mathrm{E} = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im}(f - \mathrm{id})$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$ pour $x \in \mathrm{E}$.

Corrigé : 1. Soit $x \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{id})^\perp$ avec x non nul. En particulier, on a

$$\langle x, (f - \mathrm{id})(x)\rangle = 0 \iff \langle x, f(x)\rangle = \|x\|^2$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et avec l'hypothèse faite sur f, il vient

$$\langle x, f(x)\rangle \leqslant |\langle x, f(x)\rangle| \leqslant \|x\| \times \|f(x)\| \leqslant \|x\|^2$$

D'après l'égalité précédemment établie, on en déduit que toutes les inégalités ci-dessus sont des égalités et donc, d'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, la famille $(x, f(x))$ est liée. Comme $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, on a $f(x) = \alpha x$ avec α réel. Puis

$$\langle x, f(x)\rangle = \alpha\|x\|^2 = \|x\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 1$$

Ainsi $$x \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,)$$

Autrement dit $$\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,)$$

D'après le théorème du rang, on a l'égalité des dimensions d'où l'égalité $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,)$. Comme les sev $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)$ et $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)^{\perp}$ sont supplémentaires orthogonaux, on conclut

$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)}$$

Variante : Une approche plus terre à terre : soit $a \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,)$ et $b \in \mathrm{E}$. On a

$$\|f(a+b)\|^2 \leqslant \|a+b\|^2 \iff 2\,\langle a, f(b) - b\rangle \leqslant \|b\|^2 - \|f(b)\|^2$$

En remplaçant a par ta avec t réel, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad 2t\,\langle a, f(b) - b\rangle \leqslant \|b\|^2 - \|f(b)\|^2$$

Cette inégalité est vraie pour tout t réel si et seulement si $\langle a, f(b) - b\rangle = 0$ (sinon, fonction affine majorée). Ceci prouve $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,) \perp \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,)$.

2. Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe un unique couple $(a, b) \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,) \times \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)$ tel que $x = a + b$. Une récurrence immédiate donne $f^k(a) = a$ pour tout k entier. Puis, il existe $c \in \mathrm{E}$ tel que $b = (f - \mathrm{id}\,)(c)$ et il vient par téléscopage pour n entier

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left[f^{k+1}(c) - f^k(c)\right] = \frac{f^n(c) - c}{n}$$

L'application f^n est 1-lipschitzienne et on obtient

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(b)\Big\| \leqslant \frac{2\|c\|}{n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi $$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) = a + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(b) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

On conclut $$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k \xrightarrow[n\to\infty]{} p_{\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id}\,)}}$$

Exercice 7 (****)

Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-ev normé. Montrer

$$\|\cdot\| \text{ est une norme euclidienne} \iff \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Corrigé : Le sens direct est immédiat, c'est l'identité du parallélogramme. Réciproquement, on pose

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \varphi(x, y) = \frac{1}{4}\,[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]$$

Si $\|\cdot\|$ est effectivement euclidienne, le produit scalaire s'obtient par polarisation d'où le choix précédent. On a clairement φ symétrique, définie, positive. Reste à établir le caractère bilinéaire ou simplement linéaire en la première variable par symétrie. Soit $(x,y,z) \in \mathrm{E}^3$. On a

$$\varphi(2x,y) = \|x + \frac{y}{2}\|^2 - \|x - \frac{y}{2}\|^2$$

Puis, par identité du parallélogramme, il vient

$$\|x + \frac{y}{2}\|^2 = \|\frac{x}{2} + \frac{x+y}{2}\|^2 = 2\left(\|\frac{x}{2}\|^2 + \|\frac{x+y}{2}\|^2\right) - \|\frac{x}{2} - \frac{x+y}{2}\|^2$$

puis $$\|x - \frac{y}{2}\|^2 = \|\frac{x}{2} + \frac{x-y}{2}\|^2 = 2\left(\|\frac{x}{2}\|^2 + \|\frac{x-y}{2}\|^2\right) - \|\frac{x}{2} - \frac{x-y}{2}\|^2$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient

$$\varphi(2x,x) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = 2\varphi(x,y)$$

Ensuite, on a

$$\varphi(x,y) + \varphi(z,y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|z+y\|^2 - \|z-y\|^2\right]$$

Et par identité du parallélogramme, on trouve

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|z+y\|^2 - \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\left[\|x+z+2y\|^2 + \|x-z\|^2 - \|x+z-2y\|^2 - \|x-z\|^2\right]$$

autrement dit

$$\varphi(x,y) + \varphi(z,y) = \frac{1}{2}\varphi(x+z,2y) = \varphi(x+z,y)$$

la dernière égalité résultant de la propriété précédente. Fixons $y \in \mathrm{E}$ et notons $\varphi_y : x \mapsto \varphi(x,y)$. On a

$$\forall (x,z) \in \mathrm{E}^2 \qquad \varphi_y(x+z) = \varphi_y(x) + \varphi_y(z)$$

Par récurrence immédiate, on obtient

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{E} \qquad \varphi_y(nx) = n\varphi_y(x)$$

puis $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \varphi_y(x-x) = \varphi_y(x) + \varphi_y(-x) = 0$$

et par suite $$\forall (n,x) \in \mathbb{Z} \times \mathrm{E} \qquad \varphi_y(nx) = n\varphi_y(x)$$

Ensuite $$\forall (p,q,x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \times \mathrm{E} \qquad \varphi_y\left(q\frac{p}{q}x\right) = p\varphi_y(x) = q\varphi_y\left(\frac{p}{q}x\right)$$

d'où $$\forall (r,x) \in \mathbb{Q} \times \mathrm{E} \qquad \varphi_y(rx) = r\varphi_y(x)$$

Enfin, l'application $x \mapsto \varphi_y(x)$ est continue comme composée d'applications continues. Ainsi, pour $x \in \mathrm{E}$, les applications $\lambda \mapsto \lambda\varphi_y(x)$ et $\lambda \mapsto \varphi_y(\lambda x)$ sont continues et coincident sur $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ d'où

$$\forall (\lambda,x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E} \qquad \varphi(\lambda x,y) = \varphi_y(\lambda x) = \lambda\varphi_y(x) = \lambda\varphi(x,y)$$

On peut donc conclure que φ est linéaire en la première variable et il s'agit donc d'un produit scalaire. Ainsi, on a

$$\boxed{\|\cdot\| \text{ est une norme euclidienne} \iff \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)}$$

Exercice 8 (****)

Soit E euclidien et C un convexe fermé non vide de E.

1. Soient x, a et b dans E tels que $a \neq b$ et $\|x-a\| = \|x-b\|$. Montrer
$$\|x - \frac{a+b}{2}\| < \|x-a\|$$
2. Montrer que pour $x \in \mathrm{E}$, il existe un unique vecteur $a \in \mathrm{C}$ tel que
$$\|x-a\| = \operatorname*{Inf}_{y\in \mathrm{C}} \|x-y\|$$
On définit l'application $p : x \mapsto a$ *projection sur le convexe* C.
3. Soit $x \in \mathrm{E}$ et $a \in \mathrm{C}$ tel que $\langle x-a, y-a\rangle \leqslant 0$ pour tout $y \in \mathrm{C}$. Montrer que $a = p(x)$.
4. On suppose qu'il existe $y \in \mathrm{C}$ tel que
$$\langle x - p(x), y - p(x)\rangle > 0$$
En considérant $ty + (1-t)p(x)$ avec $t \in [\,0\,;1\,]$, obtenir une contradiction.
5. Montrer $\qquad \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle x-y, p(x)-p(y)\rangle \geqslant \|p(x)-p(y)\|^2$
En déduire que p est une application continue.

Corrigé : 1. D'après l'inégalité triangulaire, on a
$$\|x - \frac{a+b}{2}\| = \frac{1}{2}\|x-a+x-b\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\|x-a\| + \|x-b\|\right) = \|x-a\|$$
Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si $(x-a, x-b)$ est positivement liée, c'est-à-dire $x-b = \lambda(x-a)$ avec $\lambda \geqslant 0$ ($x-a$ non nul sinon $x=a$ et $\|a-b\|=0$ absurde). L'égalité en norme impose $\lambda = 1$ d'où $a = b$ ce qui est faux. Ainsi
$$\boxed{\|x - \frac{a+b}{2}\| < \|x-a\|}$$

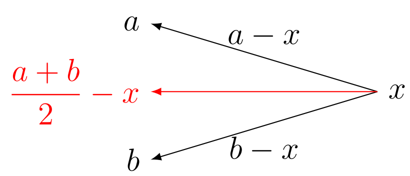

Figure 1 – Médiane

Variante : D'après l'identité du parallélogramme, on a
$$\begin{aligned} 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2 &= \|x-a+x-b\|^2 + \|x-a-(x-b)\|^2 \\ &= 4\|x - \frac{a+b}{2}\|^2 + \|a-b\|^2 \end{aligned}$$
d'où $$\|x - \frac{a+b}{2}\|^2 = \|x-a\|^2 - \frac{1}{4}\|a-b\|^2 < \|x-a\|^2$$
et le résultat suit. L'argument est plus élémentaire (mais moins naturel ?) que le recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Notons $\alpha = \operatorname*{Inf}_{y \in \mathrm{C}} \|x-y\|$, borne inférieure finie d'une partie non vide de $\mathbb{R}_+$. Par caractérisation séquentielle, il existe $(y_n)_n \in \mathrm{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\|x - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, la suite $(y_n)_n$ est à valeurs dans $\mathrm{C} \cap \mathrm{B}_f(x, \alpha+1)$ qui est un fermé borné de E de dimension finie donc un compact. Il existe alors une extractrice φ telle que

$$y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathrm{C} \cap \mathrm{B}_f(x, \alpha+1)$$

et par continuité de la norme

$$\|x - y_{\varphi(n)}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x - a\| = \alpha$$

Si b est un point de C distinct de a et qui réalise aussi la distance, alors

$$\|x - \frac{a+b}{2}\| < \|x - a\| = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{a+b}{2} \in \mathrm{C}$$

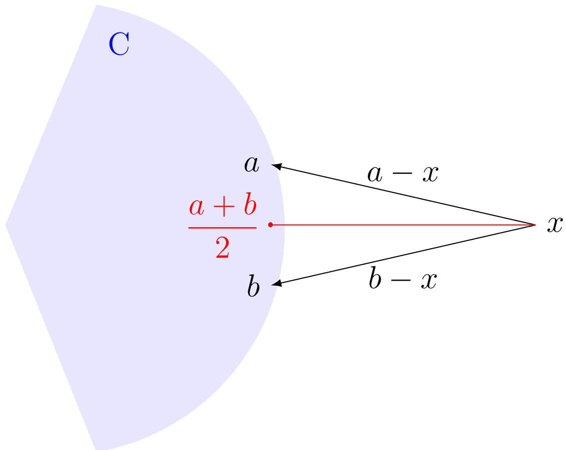

FIGURE 2 – Convexe et médiane

par convexité de C. Ceci est absurde. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathrm{E}, \text{ il existe un unique vecteur } a \in \mathrm{C} \text{ tel que } \|x - a\| = \mathrm{d}(x, \mathrm{C})}$$

3. Soit $x \in \mathrm{E}$. Pour $y \in \mathrm{C}$, on a

$$\|x - y\|^2 = \|x - a + a - y\|^2 = \|x - a\|^2 + 2\underbrace{\langle x - a, a - y\rangle}_{\geqslant 0} + \|a - y\|^2 \geqslant \|x - a\|^2$$

La distance de x à C est donc réalisée en a autrement dit

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathrm{E} \text{ et } a \in \mathrm{C} \text{ tel que } \langle x - a, y - a\rangle \leqslant 0 \text{ pour tout } y \in \mathrm{C}, \text{ alors } a = p(x).}$$

4. On pose $z = ty + (1-t)p(x)$ avec $t \in [\,0\,;1\,]$. On a $z \in \mathrm{C}$ par convexité. Puis

$$\|x - z\|^2 = \|x - p(x) - t(y - p(x))\|^2 = \|x - p(x)\|^2 - 2t\,\langle x - p(x), y - p(x)\rangle + t^2\|y - p(x)\|^2$$

et
$$-2\,\langle x - p(x), y - p(x)\rangle + t\|y - p(x)\|^2 \xrightarrow[t\to 0]{} -2\,\langle x - p(x), y - p(x)\rangle < 0$$

d'où $\|x - z\| < \|x - p(x)\|$ pour t assez proche de 0, ce qui est impossible. Ainsi

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{C} \qquad \langle x - p(x), y - p(x)\rangle \leqslant 0}$$

5. On a

$$\begin{aligned}\langle x-y, p(x)-p(y)\rangle &= \langle x-p(x)+p(x)-p(y)+p(y)-y, p(x)-p(y)\rangle \\ &= \langle x-p(x), p(x)-p(y)\rangle + \|p(x)-p(y)\|^2 + \langle p(y)-y, p(x)-p(y)\rangle\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\langle x-p(x), p(x)-p(y)\rangle = -\langle x-p(x), p(y)-p(x)\rangle \geqslant 0$$

et
$$\langle p(y)-y, p(x)-p(y)\rangle = -\langle y-p(y), p(x)-p(y)\rangle \geqslant 0$$

D'où
$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle x-y, p(x)-p(y)\rangle \geqslant \|p(x)-p(y)\|^2}$$

Soit $(x,y) \in \mathrm{E}^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\langle x-y, p(x)-p(y)\rangle \leqslant \|x-y\| \|p(x)-p(y)\|$$

On en déduit

$$\|p(x)-p(y)\| \leqslant \|x-y\|$$

l'inégalité étant réalisée si $p(x)-p(y) = 0_{\mathrm{E}}$. Ainsi

$$\boxed{\text{L'application } p \text{ est continue.}}$$