ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

# Feuille d'exercices n°52

## Exercice 1 (**)

Établir les inégalités suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sqrt{k} < \sqrt{2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k}$
2. $\forall f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R}) \qquad \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{f^2(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
3. $\forall (a_{i,j})_{(i,j)\in [\![\,1\,;n\,]\!]^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \qquad \left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}$

## Exercice 2 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de $\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \sum_{k=-1}^{1} \mathrm{P}(k)\mathrm{Q}(k)$ pour $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$.

1. Justifier $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Construire une base orthonormée de E.

## Exercice 3 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}^\top \mathrm{B})$. On note $\mathrm{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a\end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Justifier que F est un sev de E et en préciser une base.
2. Pour $\mathrm{M} \in \mathrm{E}$, calculer $\mathrm{d}(\mathrm{M},\mathrm{F})$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{F}^\perp$.

## Exercice 4 (**)

Soit E préhilbertien réel et $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs normés de E telle que

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2 = \|x\|^2$$

Montrer que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormée de E et que E est donc euclidien.

## Exercice 5 (*)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ avec $n$ entier non nul.

1. Soit $a \in \mathrm{E}$ normé. Déterminer la matrice dans la base canonique de $p_{\mathrm{Vect}\,(a)}$ et $p_{\mathrm{Vect}\,(a)^\perp}$.
2. Soit $(u_1,\ldots,u_p)$ orthonormée et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u_1,\ldots,u_p)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de $p_{\mathrm{F}}$.

## Exercice 6 (*)

Soit E préhilbertien réel et $(a,b) \in \mathrm{E}^2$ tel que $\langle a, b\rangle = 1$. Décrire l'application définie par

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \langle x, a\rangle\, b$$

## Exercice 7 (**)

Soit $\mathrm{F}_n = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ ($n$ entier non nul) muni du produit scalaire $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{F}_n^2$ et $(\pi_0, \ldots, \pi_n)$ la base orthonormée fournie par l'algorithme de Gram-Schmidt sur $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$.

1. Montrer $$\forall k \in [\![ 0\,;\, n ]\!] \qquad \deg \pi_k = k$$

   On admet que $\pi_n$ est scindé dans $\mathrm{F}_n$ à racines simples $x_1, \ldots, x_n$.

2. Montrer $\exists!(\lambda_k)_{k\in[\![ 1\,;\, n]\!]} \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \forall \mathrm{P} \in \mathrm{F}_{n-1} \qquad \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k)$

3. Vérifier que l'égalité précédente est encore vraie pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{F}_{2n-1}$.

## Exercice 8 (**)

Soit E préhilbertien réel et $p$ projecteur de E. Montrer

$$p \text{ orthogonal} \iff \forall x \in \mathrm{E} \qquad \langle p(x), x\rangle \geqslant 0$$

## Exercice 9 (**)

Soit E préhilbertien réel et F sev de E. Montrer que $\mathrm{F}^\perp = \bar{\mathrm{F}}^\perp$.

## Exercice 10 (**)

Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(1 + at + bt^2\right)^2\,\mathrm{d}t$.

## Exercice 11 (**)

Soit E préhilbertien réel. Pour $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$, on note $\mathrm{G}(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{G}(u_1, \ldots, u_n) = \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n$ libre et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$.

Établir $$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{d}(x, \mathrm{F})^2 = \frac{\det \mathrm{G}(x, x_1, \ldots, x_n)}{\det \mathrm{G}(x_1, \ldots, x_n)}$$