ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°53

Exercice 1 (***)

Soit E euclidien de dimension n.

1. Montrer qu'il existe $x_1, \dots, x_{n+1}$ dans E tels que
$$\forall (i,j) \in [\![1 ; n+1]\!]^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j \qquad \langle x_i, x_j \rangle < 0$$
2. Soient $x_1, \dots, x_p$ dans E vérifiant
$$\forall (i,j) \in [\![1 ; p]\!]^2 \quad \text{avec} \quad i \neq j \qquad \langle x_i, x_j \rangle < 0$$
   (a) Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ réels tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$. Montrer $\sum\limits_{i=1}^{p} |\alpha_i|\, x_i = 0$.
   (b) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ vérifiant $f(x_i) > 0$ pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$. Montrer que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
   (c) En déduire $p \leqslant n+1$.

Exercice 2 (**)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ pour $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$.

1. Justifier $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée (π_0, π_1, π_2) de E.
3. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ avec $\|\mathrm{P}\| = 1$. Montrer que $|\mathrm{P}(t)| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=0}^{2} \pi_i^2(t)}$ pour tout t réel.
4. En déduire que pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ avec $\|\mathrm{P}\| = 1$, on a $\|\mathrm{P}\|_{\infty, [-1;1]} \leqslant \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 3 (**)

Soit E préhilbertien réel, n entier non nul, une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ et une matrice $\mathrm{G} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{G} = \big(\langle u_i, u_j \rangle\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ avec $p \leqslant n$ telle que $\mathrm{G} = \mathrm{A}^\top \mathrm{A}$.
2. Justifier l'égalité $\qquad \forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{rg}\left(\mathrm{M}^\top \mathrm{M}\right) = \mathrm{rg}\,(\mathrm{M})$
3. En déduire une relation entre $\mathrm{rg}\,(\mathrm{G})$ et $\mathrm{rg}\,(u_1, \dots, u_n)$.

Exercice 4 (***)

Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique, $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang égal à p et $\mathrm{B} \in \mathrm{E}$. Montrer qu'il existe un unique $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ rendant minimum $\|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|^2$ et préciser ce X_0.

Exercice 5 (**)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec n entier non nul muni de $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ pour $(P, Q) \in E^2$. On note $(\pi_0, \ldots, \pi_n)$ la base orthonormée fournie par l'algorithme de Gram-Schmidt sur $(1, X \ldots, X^n)$.

1. Justifier que $\deg \pi_k = k$ pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$.
   Désormais, on fixe $j \in [\![1\,;\, n]\!]$.
2. En considérant $\langle 1, \pi_j\rangle$, montrer que π_j a au moins une racine d'ordre impair dans $]-1\,;1[$.

   On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ les racines d'ordre impair de π_j dans $]-1\,;1[$ et $S = \displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X - \alpha_i)$.
3. En considérant $\langle S, \pi_j\rangle$, montrer que π_j admet exactement j racines distinctes dans $]-1\,;1[$.

Exercice 6 (***)

On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \quad$ et $\quad U_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}P_n$

Soit $E = \mathscr{C}^0([-1\,;1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ pour $(f, g) \in E^2$.

1. Pour n entier, déterminer le degré et coefficient dominant de P_n puis calculer $\langle P_n, X^k\rangle$ avec $k \in [\![0\,;\, n]\!]$.
2. En déduire que $(U_n)_n$ est une famille orthonormale de E et que $\overline{\operatorname{Vect}(U_n)_n} = E$.

Exercice 7 (***)

Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, paires et 2π-périodiques. On pose :

$$\forall (f, g) \in E^2 \qquad \langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,dt$$

On pose $\qquad c_0 : t \mapsto 1 \quad$ et $\quad \forall n \geqslant 1 \qquad c_n : t \mapsto \sqrt{2}\cos(nt)$

1. Vérifier que $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $f \in E$. Montrer

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists P \in \mathbb{R}[X] \quad | \quad \|f - P \circ \cos\|_{\infty,[0\,;\pi]} \leqslant \varepsilon$$

3. Montrer que $(c_n)_n$ est une famille orthonormale de E et que $\overline{\operatorname{Vect}(c_n)_n} = E$.

Exercice 8 (***)

Soit E espace préhilbertien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E. On suppose

$$\forall x \in E \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle^2$$

1. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
2. Montrer que les e_i sont unitaires.
3. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.