ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°54

Exercice 1 (**)

Soit E préhilbertien et p, q des projecteurs orthogonaux. Montrer

$$p \circ q = 0 \iff q \circ p = 0$$

Indications : Traduire $p \circ q = 0$ en terme d'inclusion puis passer à l'orthogonal.

Exercice 2 (**)

Soit E euclidien et p, q des projecteurs orthogonaux. Montrer

$$\mathrm{Im}\ p \subset \mathrm{Im}\ q \iff \forall x \in \mathrm{E} \qquad \|p(x)\| \leqslant \|q(x)\|$$

Indications : Pour le sens direct, décomposer $q(x) = p(x) + q(x) - p(x)$ et observer que $q(x) - p(x) = q(x) - x + x - p(x)$ pour $x \in \mathrm{E}$.

Exercice 3 (**)

Soit E euclidien avec $\dim \mathrm{E} = n \geqslant 2$ et (u, v) une famille libre de vecteurs de E. On pose

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) = \langle u, x\rangle v + \langle v, x\rangle u$$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f possède $n-2$ colonnes nulles.
3. En déduire les valeurs propres de f.
4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Indications : 2. Considérer $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ puis une base de $\mathrm{F}^{\perp}$.
4. Déterminer $\mathrm{Card}\ \mathrm{Sp}\,(f)$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 4 (***)

Soit E euclidien. Montrer que $\{(x, y) \in \mathrm{E}^2 \mid (x, y) \text{ libre}\}$ est un ouvert de E^2.

Indications : Utiliser le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 5 (***)

Soit E préhilbertien et p, q des projecteurs orthogonaux. Montrer que les valeurs propres de $p \circ q$ sont dans $[\,0\,; 1\,]$.

Indications : Établir $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$ pour $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ et de même pour q. En déduire $\mathrm{Sp}\,(p \circ q) \subset [\,0\,; +\infty\,[$.

Exercice 6 (***)

Soit E euclidien, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

1. Montrer que $\quad \mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}\,) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$ pour $x \in \mathrm{E}$.

Indications : 1. Pour $x \in \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}\,)^{\perp}$, considérer $\langle x, (f - \mathrm{id}\,)(x) \rangle$ puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Utiliser la décomposition précédemment établie.

Exercice 7 (****)

Soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-ev normé. Montrer

$$\|\cdot\| \text{ est une norme euclidienne} \iff \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Indications : Pour le sens indirect, procéder par polarisation et poser φ l'application susceptible d'être le produit scalaire associé à $\|\cdot\|$. Pour $(x,y,z) \in \mathrm{E}^3$, établir en exploitant plusieurs fois l'identité du parallélogramme

$$\varphi(2x,y) = 2\varphi(x,y) \quad \text{et} \quad \varphi(x+z,y) = \varphi(x,y) + \varphi(z,y)$$

Enfin, pour $y \in \mathrm{E}$, poser $\varphi_y : x \mapsto \varphi(x,y)$ et vérifier que pour $x \in \mathrm{E}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a

$$\varphi_y(nx) = n\varphi_y(x) \quad \text{puis} \quad \varphi_y(rx) = r\varphi_y(x)$$

Conclure avec un argument de densité.

Exercice 8 (****)

Soit E euclidien et C un convexe fermé non vide de E.

1. Soient x, a et b dans E tels que $a \neq b$ et $\|x-a\| = \|x-b\|$. Montrer
$$\|x - \frac{a+b}{2}\| < \|x-a\|$$
2. Montrer que pour $x \in \mathrm{E}$, il existe un unique vecteur $a \in \mathrm{C}$ tel que
$$\|x-a\| = \operatorname*{Inf}_{y \in \mathrm{C}} \|x-y\|$$
On définit l'application $p : x \mapsto a$ *projection sur le convexe* C.
3. Soit $x \in \mathrm{E}$ et $a \in \mathrm{C}$ tel que $\langle x-a, y-a \rangle \leqslant 0$ pour tout $y \in \mathrm{C}$. Montrer que $a = p(x)$.
4. On suppose qu'il existe $y \in \mathrm{C}$ tel que
$$\langle x-p(x), y-p(x) \rangle > 0$$
En considérant $ty + (1-t)p(x)$ avec $t \in [\,0\,;1\,]$, obtenir une contradiction.
5. Montrer $\qquad \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle x-y, p(x)-p(y) \rangle \geqslant \|p(x)-p(y)\|^2$

   En déduire que p est une application continue.

Indications : 1. Utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.
2. Utiliser la caractérisation séquentielle de la borne inférieure puis localiser la suite exhibée pour travailler dans un compact.
3. Développer $\|x-y\|^2$ judicieusement.
5. Développer $\langle x-y, p(x)-p(y) \rangle$ en introduisant les quantités intermédiaires pour faire apparaître le minorant souhaité.