ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Programme de colles

⚠ Venir avec un cahier de colles : y coller les énoncés des exercices et les reprendre à l'issue de la colle.

Semaine 12 **15/12/25 - 19/12/25**

Programme :

Séries entières :
- Définition, lemme d'Abel, rayon de convergence, intervalle ouvert et disque ouvert de convergence, mode de convergence dans le disque ouvert de convergence et hors de l'adhérence de ce disque, utilisation de la règle de d'Alembert, convergence normale sur tout disque fermé centré en 0 de rayon $r < \mathrm{R}$, continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence ;
- Pour $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, comparaison des rayons si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou $a_n \sim b_n$;
- Somme de séries entières, même rayon pour $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$, série entière dérivée, intégrée, produit de Cauchy de séries entières ;
- Somme d'une série entière d'une variable réelle, continuité, théorème d'Abel radial, intégration terme à terme, dérivation terme à terme, expression des coefficients ;
- Fonction développable en série entière, unicité du développement, développements usuels ;
- Exponentielle complexe, propriété fondamentale ;
- Utilisation d'un problème de Cauchy.

Espaces préhilbertiens réels :
- Produit scalaire, norme euclidienne, identités de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, la norme euclidienne est une norme ;
- Vecteurs orthogonaux, liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls, théorème de Pythagore, orthogonal d'une partie, propriétés de l'orthogonal d'une partie, sev orthogonaux, orthogonal d'une famille génératrice, cas de deux sev dont la somme vaut l'espace et qui sont orthogonaux ;
- Famille orthonormale, liberté, orthonormalisation de Gram-Schmidt, bases orthonormales, formules matricielles dans un espace euclidien muni d'une base orthonormale ;
- Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie, projection orthogonale sur un sev de dimension finie, caractérisation géométrique du projeté orthogonal, formule du projeté orthogonal avec une base orthonormée du sev de dimension finie, inégalité de Bessel, projecteur orthogonal, caractérisation d'un projecteur orthogonal en tant que projecteur 1-lipschitzien, caractérisation métrique du projeté orthogonal ;
- Exemples « culturels » : distance à un hyperplan dans un espace euclidien, droite des moindres carrées.

Questions de cours : (avec preuve)

1. Exemple de série entière ne convergeant pas normalement sur $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$ avec $0 < \mathrm{R} < \infty$;
2. Intégration, dérivation d'une série entière et unicité du développement ;
3. Propriété fondamentale de l'exponentielle complexe et conséquences ;
4. Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;
5. Identités de polarisation ;
6. Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité ;
7. $\mathrm{A}^\perp = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{A})^\perp$;
8. Si $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$, on a $\mathrm{F} \perp \mathrm{G} \iff \mathrm{F} = \mathrm{G}^\perp \iff \mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$;
9. Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie et corollaire pour l'orthogonal de l'orthogonal ;
10. Contre-exemple en dimension infinie où $\mathrm{F} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{F}^\perp \neq \mathrm{E}$ et $\mathrm{F} \subsetneq (\mathrm{F}^\perp)^\perp$;
11. Caractérisation géométrique du projeté orthogonal (dessin obligatoire) ;
12. Formule de $p_\mathrm{F}(x)$ avec $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p)$ où $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormée ;
13. Caractérisation d'un projecteur orthogonal en tant que projecteur 1-lipschitzien ;
14. Caractérisation métrique du projeté orthogonal (dessin obligatoire) ;
15. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ muni de $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, pour $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$, détermination de $p_\mathrm{F}(1)$ puis $\mathrm{d}(1, \mathrm{F})$ (dessin obligatoire) ;
16. Théorème d'Abel radial (preuve réservée au groupe au groupe $(+)$) ;
17. Orthonormalisation de Gram-Schmidt (preuve du premier énoncé uniquement, réservée au groupe $(+)$).