Préparation à l'interrogation n°13

1 Calculs

Soient $a, b > 0$ et x, y réels. On a

$$x\ln(a) = \ln(a^x) \qquad a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)} \qquad a^x b^x = (ab)^x \qquad a^x a^y = a^{x+y}$$

2 Trigonométrie hyperbolique

Pour x, y réels, on a

$$y = \mathrm{sh}\,(x) \iff (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^x = y \pm \sqrt{y^2+1} \iff x = \underbrace{\ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)}_{=\mathrm{Argsh}\,(y)}$$

3 Calcul intégral

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$
2. $\displaystyle\int^x (1-t)^n \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$

4 Dérivation

Dérivée de f définie par

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

Tous calculs effectués, on trouve

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[\qquad f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

5 Réduction

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On a

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable} &\iff \mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \mathrm{E}_\lambda(u) \\ &\iff \dim \mathrm{E} = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \\ &\iff \chi_u \text{ scindé et } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \qquad \dim \mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda(u) \end{aligned}$$

6 Calcul matriciel

Soient $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{AY} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j a_{i,j}$$

7 Exercice type

Établir $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$

Corrigé : On a $(|x|-|y|)^2 \geqslant 0$ puis on développe le carré et l'équivalence suit.

8 Exercice type - Constante γ d'Euler

On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Corrigé : On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$. On a

$$v_n = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ d'après le critère de Riemann et comme c'est une série téléscopique, sa convergence équivaut à celle de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'où

$$\boxed{\exists \gamma \in \mathbb{R} \quad | \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma}$$

9 Exercice type

Soit E préhilbertien réel et (x,y,z) une famille libre de vecteurs de E. On note $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(y,z)$. Caractériser $p_{\mathrm{F}}(x)$ en exhibant un système linéaire.

Corrigé : On a $p_{\mathrm{F}}(x) \in \mathrm{F}$ d'où $p_{\mathrm{F}}(x) = ay + bz$ avec a, b réels et $x - p_{\mathrm{F}}(x) \in \mathrm{F}^{\perp}$ d'où

$$\begin{cases} \langle x - p_{\mathrm{F}}(x), y\rangle = 0 \\ \langle x - p_{\mathrm{F}}(x), z\rangle = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\qquad \boxed{p_{\mathrm{F}}(x) = ay + bz \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \langle y,y\rangle\, a + \langle y,z\rangle\, b = \langle x,y\rangle \\ \langle y,z\rangle\, a + \langle z,z\rangle\, b = \langle x,z\rangle \end{cases}}$

10 Exercice type

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ avec n entier non nul et $a \in \mathrm{E}$ normé. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}} p_{\mathrm{Vect}\,(a)}$.

Corrigé : Soit $x \in \mathrm{E}$. Notons $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} p_{\mathrm{Vect}\,(a)}$, $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} a$ et $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}} x$. On a

$$p_{\mathrm{Vect}\,(a)}(x) = \langle x, a\rangle a$$

Matriciellement $\qquad \forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{MX} = \langle \mathrm{X}, \mathrm{A}\rangle \mathrm{A} = \mathrm{A}(\mathrm{A}^{\top}\mathrm{X}) = (\mathrm{A}\mathrm{A}^{\top})\mathrm{X}$

On trouve $\qquad \boxed{\mathrm{M} = \mathrm{A}\mathrm{A}^{\top}}$

11 Questions de cours

Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens, développements en série entière usuels, graphes usuels.