Devoir en temps libre n°10

Problème

Soit E un ensemble non vide. On appelle *partition* de E tout ensemble $\mathcal{U} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ de parties de E tel que les A_i sont non vides, deux à deux disjoints *i.e.* $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$ et $E = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$. Si $\mathcal{U}$ est une partition de E et $\text{Card}\, \mathcal{U} = k$, on dit que $\mathcal{U}$ est une *partition de* E *en* k *parties.*

Nombres de partitions

1. Soient k et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de l'ensemble $[\![1\,;\, n]\!]$ en k parties.

Pour $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $S(n, k)$ le nombre de partitions de $[\![1\,;\, n]\!]$ en k parties. On pose également

$$S(0, 0) = 1 \quad \text{et} \quad S(n, 0) = S(0, k) = 0$$

2. Déterminer $S(n, k)$ pour $k > n$ et pour $k = 1$.

3. Montrer $$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$

On pourra distinguer les partitions de $[\![1\,;\, n]\!]$ selon qu'elles contiennent ou non le singleton $\{n\}$.

Nombres de Bell

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que B_n est égal au nombre total de partitions de $[\![1\,;\, n]\!]$.

5. Montrer $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Pour une partition de $[\![1\,;\, n+1]\!]$, on pourra commencer par choisir la partie contenant $n+1$.

6. Montrer $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{B_n}{n!} \leqslant 1$$

7. En déduire une minoration du rayon de convergence R de la série entière $\sum \dfrac{B_n}{n!} z^n$.

On pose $$\forall x \in \,]-R\,;R\,[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

8. Montrer $$\forall x \in \,]-R\,;R\,[\qquad f'(x) = e^x f(x)$$

9. En déduire une expression de f sur $]-R\,;R\,[$.

Une suite de polynômes

On définit $(\mathrm{H}_k)_k$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ par $\mathrm{H}_0 = 1$ et $\mathrm{H}_k = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\ldots(\mathrm{X}-k+1)$ pour k entier non nul.

10. Montrer que $(\mathrm{H}_0, \ldots, \mathrm{H}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

11. Pour k entier, déterminer une expression simple de $\mathrm{H}_{k+1} + k\mathrm{H}_k$ en fonction de H_k.

12. En déduire $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{X}^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{S}(n,k)\mathrm{H}_k$$

13. Soit k entier. Montrer que $f_k : x \mapsto \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k)\dfrac{x^n}{n!}$ est définie sur $]-1\,;1\,[$.

14. Pour k entier, on considère $g_k : x \mapsto \dfrac{(\mathrm{e}^x - 1)^k}{k!}$.
Montrer que g_k est solution de l'équation différentielle
$$y' = \frac{(\mathrm{e}^x - 1)^{k-1}}{(k-1)!} + ky$$

15. En déduire $$\forall (k,x) \in \mathbb{N} \times\,]-1\,;1\,[\qquad \frac{(\mathrm{e}^x-1)^k}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{S}(n,k)\frac{x^n}{n!}$$