

DM 10 de Physique

Parties I.A à rendre le mardi 16/12/25 et I.C le vendredi 19/12/25

L'énigme des pérítios (suite)

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'expliquer clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Les grandeurs complexes sont notées soulignées.

Certaines données numériques et un formulaire sont disponibles en fin d'énoncé ; d'autres données relèvent de l'initiative du candidat.

En astronomie, les sursauts radio rapides (*fast radio burst*) sont de brèves émissions radio intenses, d'une durée allant d'une fraction de milliseconde à 3 secondes, dont l'origine est encore mal comprise. Ils sont étudiés à l'aide de radiotélescopes, comme celui de Parkes en Australie. En 2010, 16 sursauts atypiques ont été découverts, dont on a essayé de comprendre l'origine. Ils ont été appelés pérítios (*perytons*), du nom de l'animal imaginaire maléfique, mi-oiseau et mi-cerf, au plumage bleu ou vert.

I.A – Un miroir pour les ondes électromagnétiques

I.A.1

Q 1. Énoncer les équations de Maxwell. Que deviennent-elles dans une région vide de charges et de courants ?

On se placera dans cette situation dans toute la sous-partie I.A.

Q 2. En déduire l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique (équation de d'Alembert).

On considère une onde électromagnétique dans le demi-espace $x < 0$, dont le champ électrique est de la forme

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y. \quad (\text{I.1})$$

Q 3. Préciser la direction et le sens de propagation de cette onde ainsi que son état de polarisation. Établir la relation, dite relation de dispersion, entre k et ω .

Cette onde rencontre une plaque métallique plane, constituée d'un conducteur parfait, dont la surface est située en $x = 0$ (figure 1).

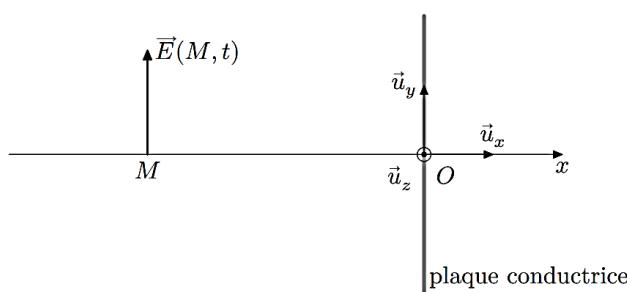


Figure 1 Onde électromagnétique rencontrant un conducteur parfait

On rappelle les relations de passage du champ électromagnétique entre un milieu 1 et un milieu 2,

$$\vec{E}_2(M, t) - \vec{E}_1(M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{I.2})$$

$$\vec{B}_2(M, t) - \vec{B}_1(M, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{I.3})$$

où M est un point de l'interface, $\vec{E}_i(M, t)$ et $\vec{B}_i(M, t)$ les limites des champs dans le milieu i en un point $M_i \rightarrow M$, $\sigma(M, t)$ la densité surfacique de charge en M , $\vec{j}_s(M, t)$ la densité de courant surfacique à l'interface et $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur unitaire normal à l'interface en M , dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

Q 4. Rappeler la définition d'un conducteur parfait. Que peut-on alors dire du champ $\vec{E}(M, t)$ dans un tel milieu ?

Q 5. Le champ électrique de l'onde décrite par l'équation (I.1) vérifie-t-il la relation de passage (I.2) ? Dans le demi-espace $x < 0$, règne aussi une onde de la forme $\vec{E}_r(M, t) = \vec{E}_{0r} \cos(\omega't + k'x)$. En utilisant les relations de passage, déterminer \vec{E}_{0r} , ω' et k' . Préciser la direction et le sens de propagation de cette onde ainsi que son état de polarisation.

Q 6. Dans le milieu $x < 0$, établir l'expression des champs électrique $\vec{E}(M, t)$ et magnétique $\vec{B}(M, t)$ résultants. Comment qualifier l'onde correspondante ?

I.A.2)

On dispose au laboratoire d'un équipement permettant d'étudier des ondes électromagnétiques dites centimétriques. On réalise l'expérience décrite figure 2, où E est un émetteur d'ondes centimétriques, P une plaque métallique, A une antenne reliée à un boîtier électronique B délivrant une tension continue U proportionnelle à la moyenne temporelle $\langle \vec{E}^2 \rangle$ du champ électromagnétique au niveau de l'antenne A.

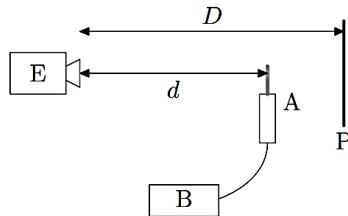


Figure 2 Dispositif expérimental à ondes centimétriques

On place la plaque P à une distance D d'environ 46 cm de l'émetteur et on relève la tension U délivrée par le boîtier pour diverses valeurs de la distance d entre l'émetteur et l'antenne. Les mesures obtenues sont présentées en figure 3.

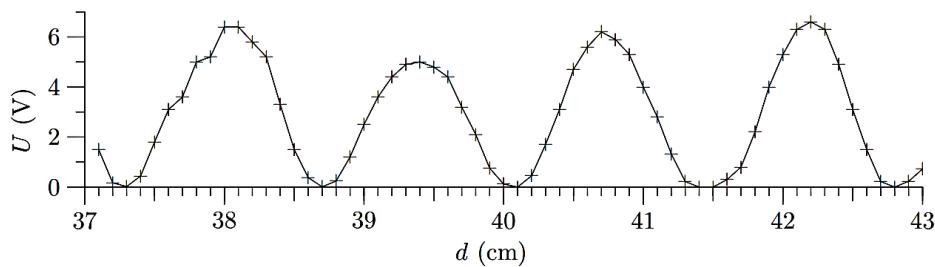


Figure 3 Tension U en fonction de la distance d entre l'antenne et l'émetteur

Q 7. Déduire de l'enregistrement de la figure 3 la fréquence f des ondes utilisées.

Le constructeur annonce une fréquence $f_{\text{cons}} = 11 \pm 1,1 \text{ GHz}$, soit une incertitude-type $u_{\text{cons}} = \frac{1,1}{\sqrt{3}} = 0,6 \text{ GHz}$.

Q 8. Estimer l'incertitude-type sur la fréquence déterminée expérimentalement et discuter de l'acceptabilité de la mesure par rapport aux données constructeur par un calcul d'écart normalisé.

I.A.3)

La figure 4 présente une deuxième expérience. E et R sont respectivement un émetteur et un récepteur d'ondes centimétriques, P_1 et P_2 sont deux plaques métalliques et S est une plaque de bois aggloméré. Le récepteur R fonctionne comme l'antenne et le boîtier électronique utilisés lors de l'expérience précédente.

Les deux plaques P_1 et P_2 étant perpendiculaires entre elles, on déplace la plaque P_2 selon l'axe Ox et on mesure la tension U délivrée par le récepteur, la position x de la plaque étant relevée par rapport à une origine arbitraire.

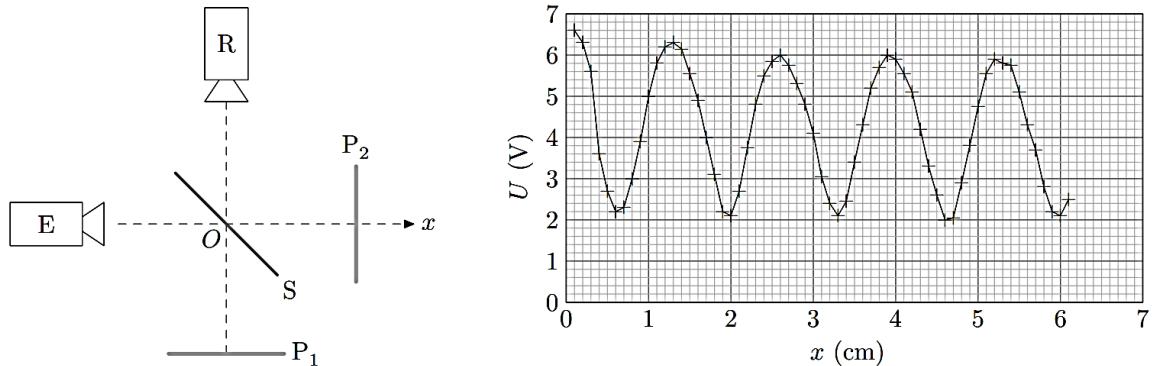


Figure 4 Expérience en ondes centimétriques

Q 9. Expliquer le rôle des éléments P_1 , P_2 et S . À quel autre montage rencontré en travaux pratiques ce montage est-il analogue ?

Q 10. Établir l'expression de la tension $U(x)$ en introduisant les grandeurs utiles. Déduire des mesures une estimation de la fréquence des ondes.

Q 11. Estimer le contraste associé à la courbe expérimentale et proposer une explication à sa valeur.

I.A.4)

On rappelle que le champ magnétique est nul dans un conducteur parfait.

Q 12. Déterminer la densité de courant surfacique $j_s(M, t)$ sur le conducteur dans le cas représenté figure 1. Quelle est la source physique du champ réfléchi $\vec{E}_r(M, t)$?

On utilise un émetteur d'ondes centimétriques, générant un champ $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \hat{u}_y$. On remplace le plan métallique de la figure 1 par une grille métallique, constituée de barreaux parallèles séparés d'une distance très inférieure à la longueur λ de l'onde électromagnétique émise par le générateur. On admet que, dans ce cas, la grille se comporte comme un plan conducteur dans lequel les seuls courants électriques qui peuvent s'établir ont même direction que les barreaux.

On considère trois situations différentes par l'orientation de la grille par rapport au champ \vec{E} (figure 5).

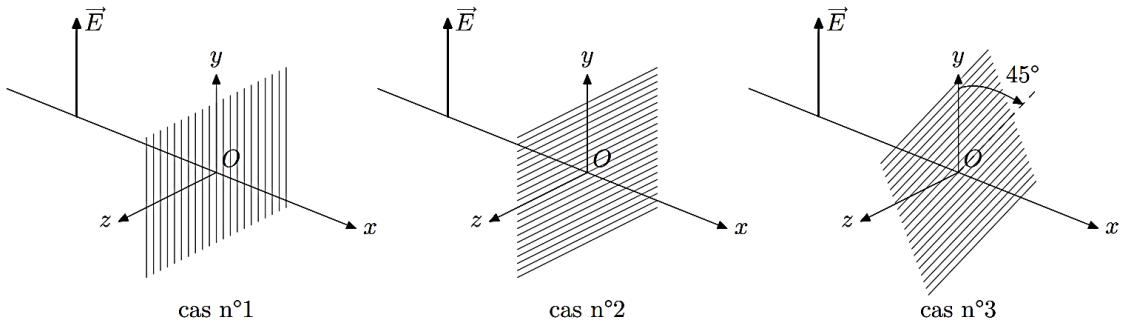


Figure 5 Onde électromagnétique incidente sur une grille métallique

Q 13. Dans chacun de ces trois cas, décrire le plus précisément possible le champ électrique observé en $x > 0$.

Q 14. À quel dispositif rencontré en travaux pratiques cette grille fait-elle penser ?

I.A.5)

Pour étudier les ondes électromagnétiques d'origine spatiale, on utilise un radiotélescope, basé sur le même principe qu'un télescope optique : un miroir parabolique réfléchit les ondes vers des capteurs situés à son foyer.

Q 15. Proposer une réalisation pratique du miroir d'un radiotélescope de très grande dimension (de l'ordre de la centaine de mètres) fonctionnant dans le domaine des ondes centimétriques.

I.C – Le four à micro-ondes

Les chercheurs ont fini par trouver le responsable des péritios : un four à micro-ondes utilisé par le personnel de l'observatoire. La sous-partie I.C étudie le four à micro-ondes afin de déterminer si l'ouverture de la porte du four avant la fin de son fonctionnement permet d'expliquer les péritios observés.

Un four à micro-ondes est constitué d'un klystron, qui émet une onde électromagnétique généralement à la fréquence $f = 2,45\text{GHz}$, acheminée par un guide d'onde vers la cavité du four. Cette cavité est un parallélépipède entouré de parois métalliques, délimitant l'espace $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq d$.

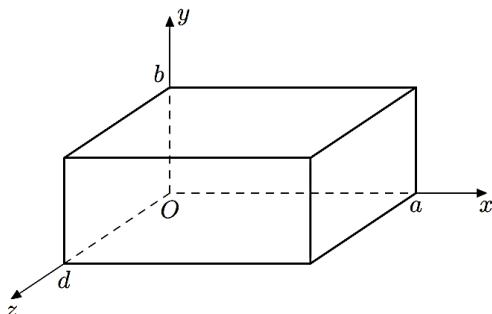


Figure 7 Cavité d'un four à micro-ondes

I.C.1)

On considère dans un premier temps que les parois sont parfaitement conductrices, l'espace intérieur au four étant assimilé au vide.

On cherche le champ électrique sous la forme

$$\begin{cases} E_x(x, y, z, t) = E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_y(x, y, z, t) = E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_z(x, y, z, t) = E_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t) \end{cases}$$

Q 29. Montrer que seules des valeurs discrètes de k_x , k_y et k_z sont possibles, repérées respectivement par des entiers m , n et ℓ .

Le triplet (m, n, ℓ) caractérise un mode propre.

Q 30. En déduire l'expression des fréquences $f_{mn\ell}$ des modes propres possibles dans la cavité.

Pour étudier le champ électromagnétique dans un four, des chercheurs ont construit un modèle ayant pour dimensions intérieures $a = 36,0$ cm, $b = 24,0$ cm et $d = 26,5$ cm, alimenté par un klystron de fréquence $f = 2,45$ GHz. Ils ont placé dans le four une feuille de papier imbibée d'hexahydrate de chlorure de cobalt ($\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$), de couleur rose, tandis que la forme anhydre est de couleur bleu ciel. Lorsque la température du papier augmente, l'hexahydrate de chlorure de cobalt passe sous forme anhydre et prend la couleur bleue. La figure 8 présente les résultats obtenus en fonction de la position dans le four de la feuille de papier.

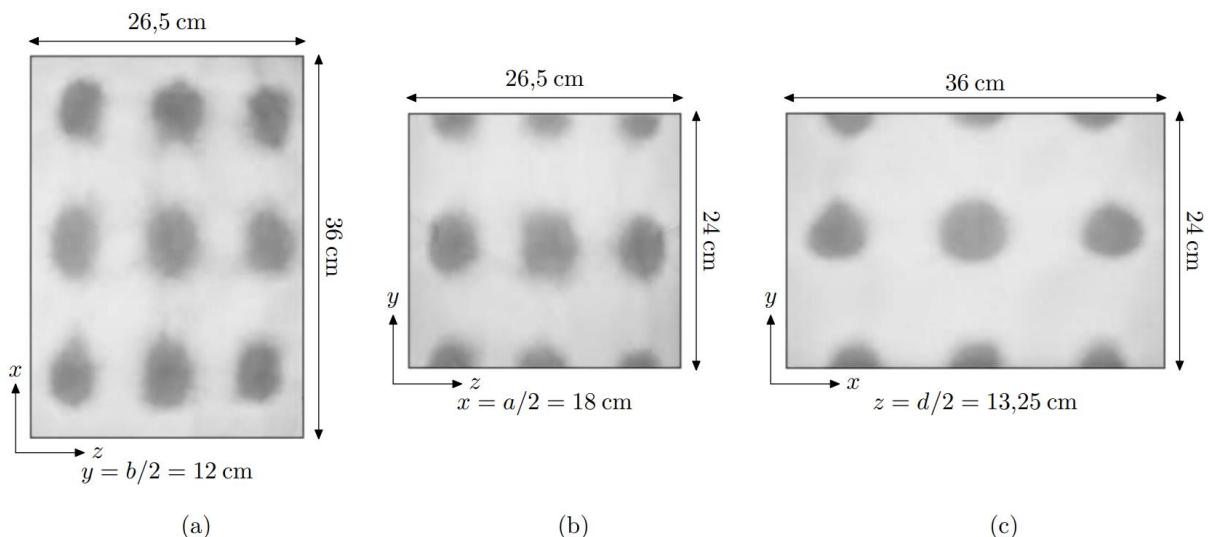


Figure 8 Aspect du papier imbibé de chlorure de cobalt, en fonction de sa position dans le four — les tâches sombres correspondent à la couleur bleue

Q 31. Déterminer la valeur du triplet (m, n, ℓ) .

La fréquence du mode propre observée est-elle en accord avec la valeur donnée pour le klystron ?

Justifier précisément l'aspect de la figure 8b en s'intéressant aux conditions aux limites sur les parois $y = 0$ et $z = 0$.

I.C.2)

On considère une cavité simplifiée à une dimension entre deux plaques conductrices de surface S , situées en $x = 0$ et $x = a$. Le champ électrique régnant dans cette cavité, en négligeant les effets de bord, est de la forme

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

où n est un entier positif.

On considère toujours que les parois sont parfaitement conductrices.

Q 32. Établir l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ dans la cavité. On notera B_0 son amplitude maximale, que l'on exprimera en fonction de E_0 .

Q 33. Établir l'expression W de l'énergie électromagnétique totale contenue dans la cavité, en fonction de B_0 , des caractéristiques de la cavité et de μ_0 . Que constate-t-on ?

I.C.3)

Pour rendre compte de la décroissance du champ électromagnétique en l'absence de source d'onde, il faut tenir compte de la conductivité électrique finie σ des parois métalliques. Les parois d'un four à micro-ondes sont en acier inoxydable, de conductivité électrique $\sigma = 1,5 \times 10^6 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$.

Nous allons étudier l'interaction d'une onde électromagnétique avec un conducteur métallique.

On considère un milieu métallique, conducteur ohmique de conductivité σ , occupant le demi-espace $x > 0$.

Q 34. Comment se simplifie l'équation de Maxwell-Ampère si $\varepsilon_0 f \ll \sigma$? Cette condition est-elle vérifiée dans le cadre du four à micro-ondes ?

Q 35. Établir alors l'équation vérifiée par $\vec{B}(M, t)$ dans le conducteur. Qu'est-ce qui permet de dire qu'elle traduit un phénomène irréversible ? Citer un phénomène décrit par une équation analogue dans un autre domaine de la physique que l'électromagnétisme.

On cherche une solution de cette équation dans le domaine $x > 0$ sous la forme

$$\underline{\vec{B}}(x, t) = \underline{f}(x) \exp(i\omega t) \vec{u}_z.$$

Q 36. Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la fonction complexe $\underline{f}(x)$, sachant que l'on impose en $x = 0$ le champ $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y$. On posera une longueur caractéristique δ que l'on exprimera en fonction de μ_0 , σ et ω .

Q 37. Commenter l'expression du champ $\vec{B}(x, t)$ dans le conducteur. Donner l'interprétation de δ .

Q 38. Rappeler l'expression de la puissance volumique cédée par un champ électromagnétique à un conducteur ohmique.

Q 39. Établir l'expression de la puissance moyenne (temporelle) dissipée dans les deux parois de la cavité de section S , en fonction de B_0 , ω , δ , S et μ_0 . volumique !

On définit le facteur de qualité de la cavité par

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie stockée dans la cavité}}{\text{énergie dissipée par période}}.$$

Q 40. En admettant que l'on puisse prendre en première approximation l'expression de l'énergie totale établie en considérant les conducteurs des parois comme parfaits, établir l'expression du facteur de qualité de la cavité en fonction de a et δ .

Q 41. Calculer la valeur de Q pour un four à micro-ondes, avec $a = 36 \text{ cm}$.

Q 42. Montrer que l'énergie totale $W(t)$ décroît avec un temps caractéristique τ que l'on exprimera en fonction de ω et Q .

Q 43. Calculer numériquement τ . Peut-on expliquer les pétitions par le champ émis lors de l'ouverture d'un four à micro-ondes ?

Données

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Parsec	$1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$
Constante des gaz parfait	$R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Formulaire

Soit \vec{A} un champ vectoriel s'exprimant en coordonnées cartésiennes par $\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{u}_x + A_y(x, y, z)\vec{u}_y + A_z(x, y, z)\vec{u}_z$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \end{aligned}$$