SÉRIES NUMÉRIQUES

B. Landelle

Table des matières

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Rappels sur les séries numériques

1 Généralités

Définition 1. *Pour* $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*, la* série $\sum u_n$ *(ou* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$*) est la suite des sommes partielles* $(\mathrm{S}_n)_n$ *avec* $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *pour* n *entier. Si* $(\mathrm{S}_n)_n$ *converge, la série* converge *et la limite de* $(\mathrm{S}_n)_n$ *est la* somme *de la série notée* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$*. Sinon, la série* diverge*. Le* reste *d'une série convergente noté* $\mathrm{R}_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n$ *est une suite de limite nulle (avec* $\mathrm{S} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$*).*

Remarque : Pour une suite définie à partir de n_0, on adapte ce qui précède.

Vocabulaire : Deux séries sont dites de *même nature* si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes. On peut remarquer que les séries $\sum u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ sont de même nature.

Proposition 1 (Condition nécessaire de convergence). *Si* $\sum u_n$ *converge, alors* $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$*.*

Démonstration. On a $u_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Remarque : Le résultat ne se transpose pas au cadre des intégrales généralisées…

Vocabulaire : Si $u_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on dit que $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*

Théorème 1. *L'ensemble des séries à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *convergentes est un* $\mathbb{K}$*-ev et on a la linéarité du symbole* Σ*.*

Démonstration. En considérant les sommes partielles puis passage à la limite. □

2 Séries géométriques et téléscopiques

Théorème 2 (Convergence d'une série géométrique). *Soit* $\alpha \in \mathbb{K}$*. On a l'équivalence*

$$\sum \alpha^n \text{ converge} \iff |\alpha| < 1$$

Pour $|\alpha| < 1$*, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

Démonstration. Si $|\alpha| \geqslant 1$, alors $|\alpha|^n \geqslant 1$ pour tout n entier d'où la divergence grossière. Si $|\alpha| < 1$, on a $\mathrm{S}_n = \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ et $\alpha^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Remarque : La série des restes $\sum \mathrm{R}_n$ d'une série géométrique $\sum \alpha^n$ convergente est une série convergence. On a

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha^k = \alpha^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \quad \text{puis} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{R}_n = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+1} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

Proposition 2. *Soit* $\sum v_n$ *une série* télescopique *avec* $v_n = u_{n+1} - u_n$. *La série* $\sum v_n$ *converge si et seulement si la suite* $(u_n)_n$ *converge et dans ce cas*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$$

Démonstration. On a $\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} [u_{k+1} - u_k] = u_{n+1} - u_0$ et le résultat suit. □

Exemples célèbres : 1. Il existe une constante γ dite d'Euler telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma$$

2. Convergence de la suite $\left(\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!}\right)_n$ en considérant son logarithme (équivalent de *de Moivre* avant celui de *Stirling*).

3 Séries à termes positifs

Proposition 3. *Soit* $(u_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. *On a*

$$\sum u_n \text{ converge} \iff (\mathrm{S}_n)_n \text{ majorée}$$

Démonstration. Théorème de la limite monotone appliqué à $(\mathrm{S}_n)_n$. □

Théorème 3. *Soient* $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ *dans* $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$.

1. *On suppose* $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ *pour* n *entier. Si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge ;*
2. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, *les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont même nature.*

Démonstration. 1. Conséquence de la proposition précédente.
2. On a $u_n = v_n w_n$ pour n entier avec $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. On dispose d'un seuil N entier tel que $\frac{1}{2} \leqslant w_n \leqslant \frac{3}{2}$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$ et on applique le 1. □

Corollaire 1. *Soient* $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ *dans* $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *avec* $u_n = O(v_n)$. *Si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge et si* $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Démonstration. Conséquence du théorème précédent et sa contraposée. □

Proposition 4. *Soient* $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ *dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *et* $v_n \geqslant 0$ *pour* n *assez grand, alors on a* $u_n \geqslant 0$ *pour* n *assez grand.*

Démonstration. On a $u_n = v_n w_n$ pour n entier avec $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Par conséquent, on dispose d'un seuil N entier tel que $w_n \geqslant \frac{1}{2}$ et $v_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant \mathrm{N}$. Le résultat suit. □

Proposition 5. *Soient* $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *dans* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telles que* $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ *pour tout* n *entier. Si* $\sum w_n$ *et* $\sum u_n$ *convergent, alors* $\sum v_n$ *converge.*

Démonstration. On a $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n$ et la série $\sum(w_n - u_n)$ converge d'où la convergence de $\sum(v_n - u_n)$ par comparaison de séries à termes positifs. Par linéarité, la série $\sum(v_n - u_n + u_n) = \sum v_n$ converge. □

4 Convergence absolue

Théorème 4. *Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument, i.e. $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a l'inégalité triangulaire généralisée*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration. Pour $(u_n)_n$ à valeurs réelles, on a $-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$ et on invoque le résultat de la proposition 5 puis pour $(u_n)_n$ à valeurs complexes, on décompose $u_n = \mathrm{Re}\,(u_n) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(u_n)$ pour n entier. On s'appuie sur les inégalités suivantes :

et $$\forall z \in \mathbb{C} \qquad 0 \leqslant |\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant |\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$$

On conclut avec le théorème 3 et le cas réel. L'inégalité généralisée s'obtient par passage à la limite sur l'inégalité classique. □

Théorème 5. *Soient $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Alors $\sum u_n$ converge absolument.*

Démonstration. Conséquence du théorème 3. □

Corollaire 2. *Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum v_n$ converge absolument et si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ ou $o(v_n)$ ou $\underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ converge absolument.*

Démonstration. Conséquence du théorème précédent. □

Théorème 6. *L'ensemble des séries absolument convergentes est un $\mathbb{K}$-ev.*

Démonstration. Conséquence de l'inégalité triangulaire. □

II Compléments sur les séries numériques

1 Critère de d'Alembert

Théorème 7 (Critère de d'Alembert).
Soit $\sum u_n$ une série à termes non nuls telle que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. *Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.*
2. *Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.*
3. *Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.*

Démonstration. • Si $\ell > 1$, comme $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$$

d'où $$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad |u_{n+1}| \geqslant |u_n| \geqslant |u_{\mathrm{N}}| > 0$$

Par suite, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

• Si $\ell < 1$, on pose $\delta = 1 - \ell > 0$. Alors on a $q = \ell + \frac{\delta}{2} < 1$. Comme $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \ell$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \ell + \tfrac{\delta}{2} = q$$

Ainsi $$\forall n \geqslant \mathrm{N} \quad |u_n| = \prod_{k=\mathrm{N}}^{n-1} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \times |u_\mathrm{N}| \leqslant q^{n-\mathrm{N}} |u_\mathrm{N}| = \mathrm{O}(q^n)$$

La série $\sum q^n$ converge comme série géométrique convergente et par comparaison, la série $\sum u_n$ converge absolument.

• Si $\ell = 1$, la convergence et la divergence sont possibles : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$. On peut obtenir leur nature par des arguments élémentaires :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$$

et on conclut par téléscopage. □

Exemples : Nature de la série $\sum \dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}}$. La mise en œuvre du critère de d'Alembert est plus simple que le recours à l'équivalent de Stirling.

2 Séries alternées

Définition 2. *Une série réelle $\sum u_n$ est dite* alternée *si la suite $((-1)^n u_n)_n$ est de signe constant.*

Remarque : Si $\sum u_n$ est alternée, alors soit $u_n = (-1)^n |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 8 (Théorème des séries alternées). *Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)_n$ décroît et tend vers zéro. Alors $\sum u_n$ converge. De plus, sa somme est du signe de u_0 et comprise entre deux sommes partielles consécutives*

Démonstration. Supposons $u_n = (-1)^n \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = |u_n|$ (sinon, il suffit de considérer $-u_n$). On pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \varepsilon_k$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{S}_{2(n+1)} - \mathrm{S}_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = \varepsilon_{2(n+1)} - \varepsilon_{2n+1} \leqslant 0$$

et $$\mathrm{S}_{2n+3} - \mathrm{S}_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -\varepsilon_{2n+3} + \varepsilon_{2n+2} \geqslant 0$$

Autrement dit, la suite extraite (S_{2n}) est décroissante et la suite extraite (S_{2n+1}) est croissante.

De plus, on a $$\mathrm{S}_{2n+1} - \mathrm{S}_{2n} = u_{2n+1} \to 0$$

Par conséquent, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Ainsi, il existe $\mathrm{S} \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{2n} = \mathrm{S} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{2n+1} = \mathrm{S}$$

Comme les indices pairs et impairs forment une partition de $\mathbb{N}$, alors la suite $(\mathrm{S}_n)_n$ converge vers la même limite S :

$$|\mathrm{S}_n - \mathrm{S}| \leqslant \max(|\mathrm{S}_{2\lfloor n/2\rfloor} - \mathrm{S}|, |\mathrm{S}_{2\lfloor n/2\rfloor+1} - \mathrm{S}|) = \mathrm{o}(1)$$

D'après le théorème sur les suites adjacentes, on sait également

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \mathrm{S}_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \leqslant \mathrm{S}_{2n+1} \leqslant \mathrm{S} \leqslant \mathrm{S}_{2n} \leqslant \mathrm{S}_0 = \varepsilon_0$$

D'où S est du signe de u_0. $\square$

Remarque : Si la série alternée est définie à partir du rang n_0, le signe de la somme de $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ est du signe de u_{n_0} puisqu'on a

$$\sum_{n \geqslant n_0} u_n = \operatorname{signe}(u_{n_0}) \sum (-1)^n |\varepsilon_{n+n_0}|$$

Exemple : $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée vérifiant le critère des séries alternées. Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge.

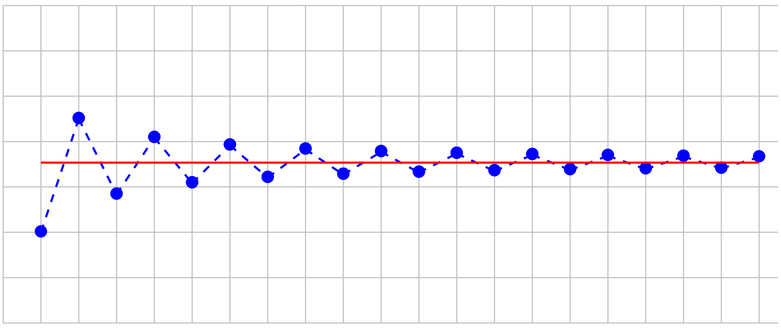


Figure 1 – Tracé de la suite $(\mathrm{S}_n)_n$

Calculons sa somme. On a

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\right) \mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Notons $\Delta_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$|\Delta_n| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}(1)$$

Par suite $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{S}_n = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = -\ln(2)$$

On verra ultérieurement d'autres procédés pour obtenir ce résultat.

Théorème 9 (Reste d'une série alternée). *Soit $\sum u_n$ une série alternée vérifiant les hypothèses du critère des séries alternées. Alors R_n est du signe de u_{n+1} et $|\mathrm{R}_n| \leqslant |u_{n+1}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. On applique le théorème spécial des séries alternées à la série définissant R_n à savoir $\sum\limits_{k \geqslant n+1} u_k$. Par suite, R_n est du signe du premier terme u_{n+1} et compris entre les deux sommes partielles u_{n+1} et $u_{n+1} + u_{n+2}$. Si $u_{n+1} \geqslant 0$, on a $0 \leqslant u_{n+1} + u_{n+2} \leqslant \mathrm{R}_n \leqslant u_{n+1}$ et si $u_{n+1} \leqslant 0$, on a $u_{n+1} \leqslant \mathrm{R}_n \leqslant u_{n+1} + u_{n+2} \leqslant 0$. En observant

$$|u_{n+1} + u_{n+2}| = |u_{n+1}| - |u_{n+2}|$$

il vient $$0 \leqslant |u_{n+1}| - |u_{n+2}| \leqslant |\mathrm{R}_n| \leqslant |u_{n+1}|$$

□

Application : Calcul approché de $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ à une précision donnée.

Exemple : Pour $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$, on sait que

$$|\mathrm{S} - \mathrm{S}_n| = |\mathrm{R}_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$ fixé, si on a $\frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon$, alors on aura $|\mathrm{S} - \mathrm{S}_n| \leqslant \varepsilon$. On choisit n avec

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} - 1 \leqslant n \Longleftarrow n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$$

3 Techniques de comparaison série-intégrale [à savoir refaire]

Tous les résultats qui suivent doivent être redémontrés avant utilisation. Si la fonction f considérée est définie sur $[\,n_0\,;+\infty\,[$ au lieu de $[\,0\,;+\infty\,[$, si la fonction f est croissante au lieu de décroissante, on adapte les résultats.

Proposition 6. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec f décroissante. On a*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

et $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Par décroissance de f, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall t \in [\,k\,;k+1\,] \qquad f(t) \leqslant f(k)$$

et $$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \forall t \in [\,k-1\,;k\,] \qquad f(k) \leqslant f(t)$$

Après intégration, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Le premier encadrement suit par sommation pour $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$ et relation de Chasles. Puis, en sommant la première inégalité pour $k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$ et la seconde pour $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$ avec n entier, on obtient le deuxième encadrement par relation de Chasles. □

Théorème 10. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ avec f décroissante. Alors $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.*

Démonstration. On note $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$ pour n entier. Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ est majorée d'où la convergence de la série $\sum f(n)$ puisque la suite des sommes partielles est croissante majorée. Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors

$\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ puisqu'il s'agit d'une fonction croissante non majorée d'après le théorème de limite monotone. En particulier, on a $\displaystyle\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ d'où $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. □

Exemple : Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.
Quelle stratégie ? pas d'équivalent plus simple.

Comparaison : On a $\qquad \displaystyle\frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n\ln(n)} \geqslant \frac{1}{n(n-1)}$

Le théorème de comparaison ne donne rien. La minoration vient de l'inégalité de concavité $\ln x \leqslant x-1$ pour $x>0$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n\geqslant 2} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right]$ est convergente comme série télescopique.
Le théorème de comparaison série/intégrale règle la question. La fonction $[\,2\,;+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, t \mapsto \displaystyle\frac{1}{t\ln(t)}$ est décroissante (inverse de fonction croissante) positive et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$ est divergente.

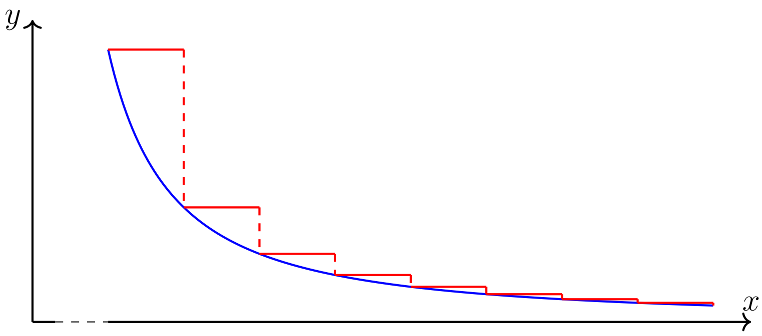


Figure 2 – Tracé de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ et $n \mapsto \dfrac{1}{n\ln(n)}$

Corollaire 3 (Théorème sur les séries de Riemann). *Soit α réel. On a l'équivalence*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \textit{ converge} \iff \alpha > 1$$

Démonstration. Si $\alpha \leqslant 0$, la série diverge grossièrement. Si $\alpha > 0$, on applique le théorème de comparaison série/intégrale avec $[\,1\,;+\infty\,[\, \to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ qui est décroissante positive et on conclut d'après le critère de Rieman pour les intégrales généralisées. □

Remarque : Par négation de l'équivalence précédente, on a

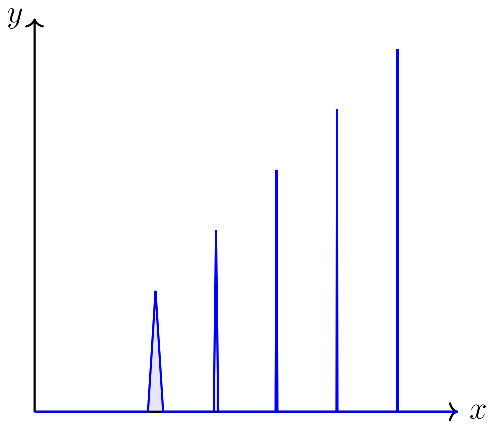
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge} \iff \alpha \leqslant 1$$

Application : Construction d'une fonction continue positive non bornée dont l'intégrale est convergente.

Soit f affine par morceaux avec $f(t) = 0$ pour $t \in \left[0\,;2-\frac{1}{8}\right]$ et pour tout $n \geqslant 2$ $f(n) = n$, affine sur $\left[n-\frac{1}{n^3}\,;n\right]$ et $\left[n\,;n+\frac{1}{n^3}\right]$ et $f(t)=0$ pour $t \in \left[n+\frac{1}{n^3}\,;(n+1)-\frac{1}{(n+1)^3}\right]$.
Avec f ainsi définie, on a

$$0 \leqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=2}^{\lfloor x\rfloor+1} \frac{1}{n^2}$$

d'où la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ bien que f soit non bornée.



La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ constitue également un exemple de fonction de classe $\mathscr{C}^1$, croissante, convergente dont la dérivée n'admet pas de limite.

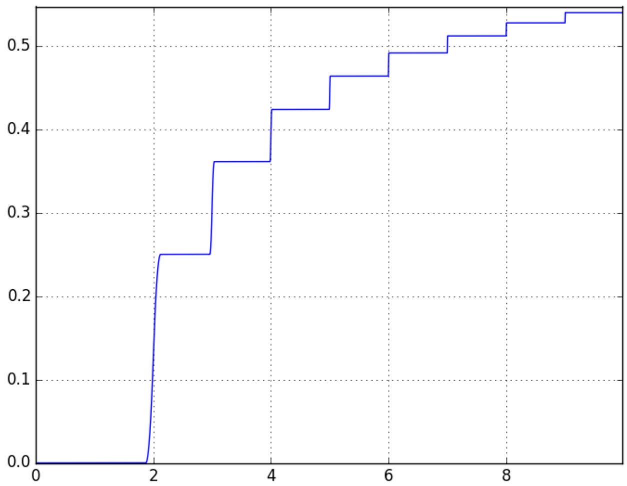


Figure 3 – Tracé de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Proposition 7. *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, f décroissante. On note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum f(n)$ et R_n son reste d'ordre n en cas de convergence.*

1. *Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors*

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{R}_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. *Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors* $\quad \mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration. 1. On a $\qquad \forall k \geqslant 1 \qquad \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$

On somme pour $k \in [\![\, n+1\,;\,\mathrm{N}\,]\!]$ et on obtient

$$\int_{n+1}^{\mathrm{N}+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{R}_{n,\mathrm{N}} = \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} f(k) \leqslant \int_n^{\mathrm{N}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On fait ensuite tendre $\mathrm{N} \to +\infty$ (tous les termes convergent).

2. On a $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \to +\infty$ puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge et la fonction f admet une limite finie en $+\infty$ (limite monotone). Ainsi

$$\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{f(n+1)}_{=\mathrm{O}(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

et l'équivalent attendu vient par encadrement. $\square$

Remarque : L'encadrement du reste ne permet pas à coup sûr d'obtenir un équivalent. Par exemple, avec $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$, on obtient $\mathrm{e}^{-(n+1)} \leqslant \mathrm{R}_n \leqslant \mathrm{e}^{-n}$ qui ne permet pas de conclure. Le calcul direct donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k} = \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{-1}}$$

Exemples : 1. On a $\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + \mathrm{O}(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

2. On a $\qquad \displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \implies \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

3. On peut appliquer les mêmes techniques si f croît. Par exemple, avec $f(t) = \sqrt{t}$ pour $t \geqslant 0$, il vient

$$\forall k \geqslant 1 \qquad \int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{k} \leqslant \int_k^{k+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

Puis $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\int_0^n \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \int_1^{n+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \implies \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n\sqrt{n}$

Remarque : On peut obtenir ce résultat plus naïvement avec une utilisation de somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = n\sqrt{n}\ \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n\sqrt{n}$$

4 Sommation des relations de comparaison

Dans cette section, la suite $(v_n)_n$ est supposée positive mais les résultats valent aussi pour une suite négative (en considérant $(-v_n)_n$).

Théorème 11. *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique et* $\sum v_n$ *une série à termes positifs convergente.*

1. *Si* $u_n = o(v_n)$, *alors* $\sum u_n$ *converge absolument et* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$;
2. *Si* $u_n = O(v_n)$, *alors* $\sum u_n$ *converge absolument et* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$;
3. *Si* $u_n \sim v_n$, *alors* $\sum u_n$ *converge absolument et* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

Démonstration. Dans tous les cas, on a $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ d'où la convergence absolue de $\sum u_n$.
1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N entier tel que

$$\forall k \geqslant \mathrm{N} \qquad |u_k| \leqslant \varepsilon v_k$$

Par inégalité triangulaire et comparaison, il vient pour $n \geqslant \mathrm{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

ce qui est le résultat attendu.
2. La preuve est similaire.
3. On applique le résultat du 1. avec $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$. □

Remarque : Le résultat vaut encore si $(v_n)_n$ est positive seulement à partir d'un certain rang (en adaptant la preuve).

Exemple : On a $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Théorème 12. *Soit* $\sum u_n$ *une série numérique et* $\sum v_n$ *une série à termes positifs divergente.*

1. *Si* $u_n = o(v_n)$, *alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$;
2. *Si* $u_n = O(v_n)$, *alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$;
3. *Si* $u_n \sim v_n$, *alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N entier tel que

$$\forall k \geqslant \mathrm{N} \qquad |u_k| \leqslant \varepsilon v_k$$

Pour $n \geqslant \mathrm{N}$, il vient

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} u_k\right| + \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} |u_k| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} u_k\right| + \varepsilon \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} v_k$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=\mathrm{N}}^{n} v_k \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ en tant que somme partielle d'une série à termes positifs divergente, il existe $\mathrm{P} \geqslant \mathrm{N}$ tel que $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} u_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} v_k$ pour $n \geqslant \mathrm{P}$, d'où

$$\forall n \geqslant \mathrm{P} \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant 2\varepsilon \sum_{k=\mathrm{N}}^{n} v_k \leqslant 2\varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Le résultat suit.
2. La preuve est similaire.
3. On utilise ensuite le résultat du 1. avec $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$.

$\square$

Remarque : Le résultat vaut encore si $(v_n)_n$ est positive seulement à partir d'un certain rang (en adaptant la preuve).

Exemples : 1. On a $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_{n-1}^{n} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ puisque $\sqrt{n-1} \leqslant \displaystyle\int_{n}^{n+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}$ et par suite

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{0}^{n} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n\sqrt{n}$$

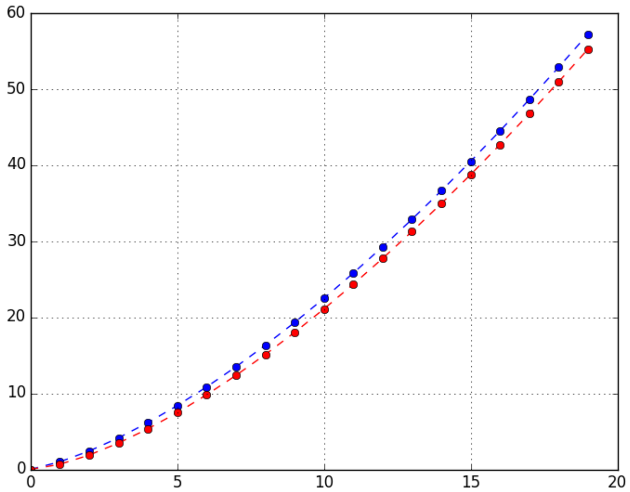


FIGURE 4 – Tracé des suites $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)_n$ et $\left(\dfrac{2}{3}n\sqrt{n}\right)_n$

2. On a $\displaystyle\int_{n}^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ puisque $\ln(n) \leqslant \displaystyle\int_{n}^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(n+1)$ et par suite

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{1}^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$$

On peut bien sûr obtenir ce résultat avec l'équivalent de Stirling mais c'est plus savant.

Corollaire 4 (Lemme de Césaro). *Soit $(u_n)_n$ suite réelle ou complexe admettant une limite ℓ (éventuellement infinie dans le cas réel). On a*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

Démonstration. Supposons ℓ finie. On a $u_n - \ell = \mathrm{o}(1)$ d'où par sommation de relations de comparaison, la série $\sum 1$ étant positive et grossièrement divergente

$$\sum_{k=0}^{n} [u_k - \ell] = \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = \mathrm{o}(n+1)$$

et par conséquent
$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \ell + \mathrm{o}(1)$$

Supposons $(u_n)_n$ réelle et $\ell = +\infty$ (preuve identique pour $-\infty$). On a $1 = \mathrm{o}(u_n)$ d'où par sommation de relations de comparaison, la suite $(u_n)_n$ étant positive à partir d'un certain rang et la série $\sum u_n$ grossièrement divergente
$$\sum_{k=0}^{n} 1 = \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

autrement dit
$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

$\square$

Règle : Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{C}}{n^\beta}$ avec C réel non nul et $\beta > 0$, alors on peut appliquer la règle suivante : on cherche α réel tel que $\left(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha\right)_n$ admette une limite finie ℓ non nulle. Si un tel α existe, il est strictement négatif et le théorème de Césaro donne
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha\right] = \frac{1}{n}\left[u_n^\alpha - u_0^\alpha\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

d'où
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell^{\frac{1}{\alpha}} n^{\frac{1}{\alpha}}$$

Exemple : Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$. Déterminons un équivalent de u_n pour $n \to +\infty$. Sans difficulté, on trouve $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $u_n > 0$ pour tout n entier. Puis, pour α réel, on a
$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha\left[\mathrm{e}^{-\alpha u_n} - 1\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} -\alpha u_n^{\alpha+1}$$

On choisit alors $\alpha = -1$. Ainsi
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

D'où
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

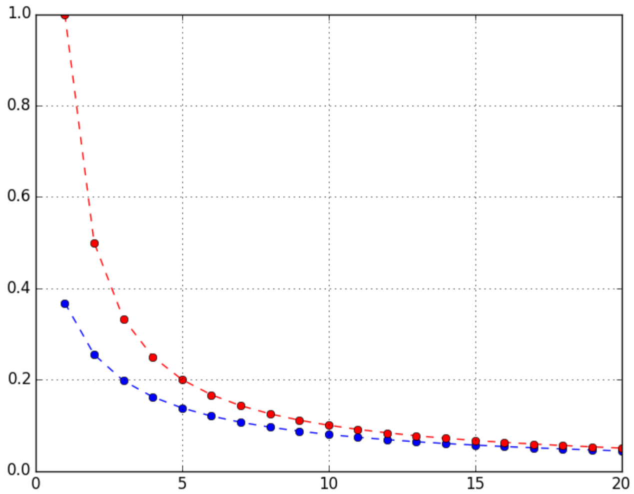


FIGURE 5 – Tracé des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$