ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°46

Exercice 1 (*)

Étudier la convergence simple et normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx^2}$$

Corrigé : Pour n entier non nul, on a $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = x(\mathrm{e}^{-x^2})^n$ terme géométrique de raison $\mathrm{e}^{-x^2} < 1$ pour $x \neq 0$ d'où la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$. Les fonctions f_n sont dérivables et on trouve

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad f_n'(x) = (1-2nx^2)\,\mathrm{e}^{-nx^2}$$

d'où
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|f_n\|_\infty = \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right| = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2n}}$$

D'après le critère de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty$ diverge. Cette borne supérieure est atteinte en $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ pour n entier non nul mais si on reste à distance de zéro, on peut espérer mieux. En effet, pour $a > 0$, notant $\mathrm{J}_a = \,]-\infty\,;-a] \cup [\,a\,;+\infty\,[$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|f_n\|_{\infty,\mathrm{J}_a} = f_n(a)$$

et $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(a)$ converge d'après la converge simple établie initialement. On conclut

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}, \text{ pas normalement sur } \mathbb{R} \text{ mais normalement sur }]-\infty\,;-a] \cup [\,a\,;+\infty\,[\text{ pour tout } a>0.}$$

Exercice 2 (**)

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = n^2(x^{2n} - x^{2n+1})$$

Corrigé : On a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ pour $x \in [\,0\,;1\,]$ (trivialement pour $x = 0$ et par croissances comparées pour $x \in \,]\,0\,;1\,]$. On en déduit la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[\,0\,;1\,]$. Les fonctions f_n sont dérivables et on trouve

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad f_n'(x) = n^2\left(2nx^{2n-1} - (2n+1)x^{2n}\right) = n^2x^2n - 1\,(2n - (2n+1)x)$$

Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f_n\|_\infty = f_n\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n^2}{2n+1}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n}$$

et
$$\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n} = \mathrm{e}^{2n\ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)} = \mathrm{e}^{2n\left(-\frac{1}{2n+1}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

d'où $$\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Par conséquent, la série $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge grossièrement. Supposons que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[\,0\,;1\,]$. Ainsi, on dispose d'un seuil N entier tel que, pour $n \geqslant \mathrm{N}$, le reste R_n est borné et on a $\|\mathrm{R}_n\|_\infty = \mathrm{o}(1)$. Or, on a $f_n = \mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_n$ pour n entier non nul d'où, par inégalité triangulaire

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \|f_n\|_\infty = \|\mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_n\|_\infty \leqslant \|\mathrm{R}_{n-1}\|_\infty + \|\mathrm{R}_n\|_\infty = \mathrm{o}(1)$$

ce qui contredit $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. On conclut

La série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $[\,0\,;1\,]$ mais ni uniformément, ni normalement sur $[\,0\,;1\,]$.

Exercice 3 (**)

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{1+nx}$$

Corrigé : Soit n entier. On a $f_n(x) = \mathrm{o}(x^n)$ pour $x \in [\,0\,;1\,[$ et $f_n(1) = \dfrac{1}{1+n}$. On en déduit la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[\,0\,;1\,[$. Les fonctions f_n sont dérivables et on trouve

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;1\,] \qquad f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+(n-1)x)}{(1+nx)^2}$$

On en déduit la croissance des fonctions f_n et par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f_n\|_{\infty,[\,0\,;1\,[} = f_n(1) = \frac{1}{1+n}$$

Soit $a \in [\,0\,;1\,[$. Pour les mêmes raisons, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f_n\|_{\infty,[\,0\,;a\,]} = f_n(a)$$

Pour n entier, on trouve par troncature du reste

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \mathrm{R}_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} f_{2n}(x) = nf_{2n}(x)$$

En supposant R_n borné sur $[\,0\,;1\,[$, pour n assez grand, il vient

$$\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[\,0\,;1\,[} \geqslant n\|f_{2n}\|_{\infty,[\,0\,;1\,[} = nf_{2n}(1) = \frac{n}{1+2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

ce qui nie la convergence uniforme de R_n vers zéro sur $[\,0\,;1\,[$. On conclut

La série $\sum f_n$ converge simplement sur $[\,0\,;1\,[$, ni normalement, ni uniformément sur $[\,0\,;1\,[$ mais normalement sur $[\,0\,;a\,]$ pour $a \in [\,0\,;1\,[$.

Variante : Pour la convergence uniforme sur $[\,0\,;1\,[$, si elle avait lieu, comme $f_n(x) \xrightarrow[x\to1]{} f_n(1) = \dfrac{1}{1+n}$, on devrait avoir $\sum f_n(1)$ convergente d'après le théorème de double limite ce qui n'est pas.

Exercice 4 (**)

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ avec

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n(x) = \frac{\ln(n+x)}{n^2+x^2}$$

Corrigé : Pour $x \geqslant 0$, on a $\qquad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

par croissances comparées d'où la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Pour n entier non nul et $x \geqslant 0$, on a

$$f_n(x) = \frac{\ln\left(n\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\right)}{n^2+x^2} = \frac{\ln n}{n^2+x^2} + \frac{\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)}{n^2+x^2}$$

Avec l'inégalité de concavité, on trouve

$$f_n(x) \leqslant \frac{\ln n}{n^2+x^2} + \frac{x}{n(n^2+x^2)}$$

et avec l'inégalité $2nx \leqslant n^2+x^2$, on obtient

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{2n^2}$$

Ainsi $\qquad \|f_n\|_\infty = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

On conclut $\qquad \boxed{\text{La série de fonctions } \sum\limits_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge normalement sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$

Exercice 5 (*)

On pose $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \dfrac{1}{n^2+x^2}$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de fonctions continues et on a $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^2}$ pour tout n entier non nul. La convergence normale et donc uniforme s'ensuit. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction S est bien définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. Pour x réel fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+x^2}$ est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$, décroissante et intégrable par comparaison et critère de Riemann. Ainsi, par comparaison série/intégrale, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \iff \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant \frac{\pi}{2x}$$

On conclut $\qquad \boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}}$

Exercice 6 (**)

On pose $\qquad \forall x > -1 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right]$

1. Montrer que S est définie, continue sur $\mathrm{I} = \left]-1\,;+\infty\right[$.
2. Calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$ pour $x \in \mathrm{I}$.
3. Déterminer un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to -1$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathrm{I} \qquad u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$

Soit $x > -1$. On a $\qquad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

ce qui prouve que S est bien définie sur I. Soit $a \in \left]-1\,;0\right]$ et $b \geqslant 0$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_{\infty,[\,a\,;b\,]} \leqslant \frac{b}{n(n+a)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme tout segment de I est inclus dans un segment $[\,a\,;b\,]$ avec a et b choisis comme précédemment, il s'ensuit que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ de fonctions continues converge normalement donc uniformément sur tout segment de I et par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction S est définie, continue sur I.}}$$

2. Par linéarité du symbole somme (car convergence), il vient pour $x \in \mathrm{I}$

$$\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right]$$

Par téléscopage, on conclut $\boxed{\forall x \in \mathrm{I} \qquad \mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x) = \frac{1}{x+1}}$

3. Par continuité de S sur I, il vient $\mathrm{S}(x+1) \xrightarrow[x\to-1]{} \mathrm{S}(0) = 0$ d'où $\mathrm{S}(x+1) \underset{x\to-1}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x+1}\right)$ et on trouve

$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to-1}{\sim} -\frac{1}{x+1}}$$

Exercice 7 (*)

On pose $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$

Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

Corrigé : On pose $\ \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \left[0\,;+\infty\right[\qquad u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$

La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ qui converge simplement d'après le critère des séries alternées puisque pour $x \geqslant 0$, la suite $\left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ décroît et tend vers zéro. Par dérivation, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n'(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ vérifie elle-aussi le critère des séries alternées et par majoration du reste, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

D'où $$\|\mathrm{R}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ (donc sur tout segment) et on conclut

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathscr{C}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

Exercice 8 (**)

On pose $$\forall x > 1 \qquad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,1\,;+\infty\,[$.
2. Préciser la monotonie et convexité de la fonction ζ.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x)$.
4. Déterminer un équivalent simple de $\zeta(x)$ pour $x \to 1^+$.
5. Étudier la convexité de $\ln \circ \zeta$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,1\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$

Pour n entier non nul, la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,1\,;+\infty\,[$. Soit k entier. On a

$$\forall x > 1 \qquad u_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{\ln(n)^k}{n^x}$$

d'où, pour $a > 1$ $$\|u_n^{(k)}\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} = \frac{\ln(n)^k}{n^a}$$

Avec $\alpha = \dfrac{1+a}{2}$, on a par croissances comparées $\dfrac{\ln(n)^k}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. On en déduit la convergence normale $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n^{(k)}$ série de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur tout intervalle $[\,a\,;+\infty\,[$ et ceci pour tout k entier d'où

$$\boxed{\zeta \in \mathscr{C}^\infty(]\,1\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

2. La fonction ζ décroît comme somme de fonctions décroissantes puis, par dérivation

$$\forall x > 1 \qquad \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)^2}{n^x} \geqslant 0$$

Ainsi $$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est décroissante et convexe.}}$$

3. Par convergence normale sur $[\,2\,;+\infty\,[$ par exemple, on a par double limite

$$\boxed{\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1}$$

4. Soit $x>1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est continue, décroissante, positive sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Par comparaison série/intégrale, l'intégrale et la série sont de même nature (c'est du Riemann en fait !) et on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

D'où $$\boxed{\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}}$$

5. On a $\qquad \forall x>1 \qquad (\ln\circ\zeta)''(x) \geqslant 0 \iff \zeta(x)\zeta''(x) - \zeta'(x)^2 \geqslant 0$

Soit $x>1$ et N entier non nul. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, on a

$$\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\ln(n)}{n^x}\right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\ln(n)}{n^{x/2}}\frac{1}{n^{x/2}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{\ln(n)^2}{n^x}\right)$$

Faisant tendre $\mathrm{N}\to+\infty$, toutes les sommes convergent et on obtient

$$\zeta'(x)^2 \leqslant \zeta(x)\zeta''(x)$$

On conclut $$\boxed{\text{La fonction } \ln\circ\zeta \text{ est convexe.}}$$

Exercice 9 (**)

On pose $$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$$

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une relation reliant $\mathrm{S}(2x)$ et $\mathrm{S}(x)$ pour x réel.
3. En déduire que S n'est pas dérivable en 0.

Corrigé : 1. On pose $$\forall (n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R} \qquad u_n(x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$$

On a $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \|u_n\|_\infty = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2^n}$ qui converge (somme géométrique de raison 1/2). Ainsi, la série de fonctions continues $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement et donc uniformément et par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction S est bien définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. Soit x réel. On a $$\mathrm{S}(2x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^n} = 2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin(2^n x)}{2^n}$$

D'où $$\boxed{\forall x\in\mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(2x) = 2\mathrm{S}(x) - \sin(2x)}$$

3. Supposons S dérivable en 0. Comme $\mathrm{S}(0)=0$, on trouve pour x non nul

$$2\frac{\mathrm{S}(2x)}{2x} = 2\frac{\mathrm{S}(x)}{x} - \frac{\sin(2x)}{x}$$

et faisant tendre $x\to 0$ $\qquad 2\mathrm{S}'(0) = 2\mathrm{S}'(0) - 2$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction S n'est pas dérivable en 0.}}$$

Exercice 10 (**)

Calculer pour $n \in \mathbb{Z}$
$$\mathrm{I}_n = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}n\theta}}{1 - 2\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

Corrigé : Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'intégrale I_n est bien définie en tant qu'intégrale de fonction continue sur un segment puisque $\left|2\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}\right| = 2$ ce qui garantit que le dénominateur de l'intégrande ne s'annule pas. On a
$$\mathrm{I}_n = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}n\theta}}{1 - \frac{\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\theta}}{2}}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n-1)\theta}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}k\theta}}{2^k}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n-1-k)\theta}}{2^k}\,\mathrm{d}\theta$$

On pose
$$\forall (k,\theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad u_k(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n-1-k)\theta}}{2^k}$$

On a
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|u_k\|_\infty = \frac{1}{2^k}$$

terme de série géométrique convergente ce qui prouve la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum u_k$. Ainsi en intégrant terme à terme, on obtient
$$\mathrm{I}_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n-1-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta}_{=2\pi\delta_{n-1,k}}$$

On conclut
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \mathrm{I}_n = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2^{n-1}} & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Variante : La série $\sum \int_0^{2\pi} |u_k(\theta)|\,\mathrm{d}\theta = \sum \frac{1}{2^k}$ converge ce qui garantit l'intégration terme à terme et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 11 (**)

On rappelle
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{\,x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum f_n$ avec
$$\forall (x,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \qquad f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,-x} x^n}{n!}$$

Corrigé : On a convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$ avec
$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{e}^{\,-x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^{\,-x}\mathrm{e}^{\,x} = 1$$

La série $\sum f_n$ est une série de fonctions de $\mathscr{C}^1$. Par dérivation, on a
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \qquad f_n'(x) = \frac{(n-x)x^{n-1}\mathrm{e}^{\,-x}}{n!}$$

Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f_n\|_\infty = f_n(n) = \frac{\mathrm{e}^{\,-n} n^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

Par conséquent, la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$. Supposons qu'il y ait convergence uniforme. D'après le théorème de double limite, on aurait alors

$$1 = \mathrm{S}(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}x^n}{n!} = 0$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}_+.}$$