ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Feuille d'exercices n°47

Exercice 1 (***)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que η est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Corrigé : On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ qui converge simplement d'après le critère des séries alternées puisque pour $x > 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ décroît et tend vers zéro. Par dérivation, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}\ln(n)}{n^x}$$

Par croissances comparées $$\forall x > 0 \qquad |u_n'(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pour $x > 0$ fixé, on pose $$\forall t > 0 \qquad \varphi(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$$

Cette fonction est dérivable avec

$$\forall t > 0 \qquad \varphi'(t) = \frac{1 - x\ln(t)}{t^{x+1}}$$

d'où la décroissance de φ sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,;+\infty\right[$. Ainsi, pour $x \in [\,a\,;b\,] \subset]\,0\,;+\infty\,[$, pour $n \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$, le critère des séries alternées s'applique et par majoration du reste, on a donc

$$|\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

Ainsi $$\|\mathrm{R}_n\|_{\infty,[\,a\,;b\,]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge donc uniformément sur tout segment et on conclut

$$\boxed{\eta \in \mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

Exercice 2 (***)

On pose $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$$

1. Montrer que S est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{S}(x)$ puis un équivalent simple de $\mathrm{S}(x)$ pour $x \to +\infty$.
3. Déterminer une écriture intégrale de $\mathrm{S}(x)$ pour $x > 0$.
4. En déduire le comportement de $\mathrm{S}(x)$ lorsque $x \to 0$.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. On a

$$\forall (k,x) \in \mathbb{N} \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k} k! n^k}{(1+nx)^{k+1}}$$

Pour $x > 0$ et k entier fixés, on pose

$$\forall u > 0 \qquad \varphi(u) = \frac{u^k}{(1+ux)^{k+1}}$$

La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et par dérivation

$$\forall u > 0 \qquad \varphi'(u) = \frac{u^{k-1}(1+ux)^k\,[k(1+ux)-(k+1)xu]}{(1+ux)^{2(k+1)}} = \frac{u^{k-1}(1+ux)^k\,[k-xu]}{(1+ux)^{k+2}}$$

On en déduit que φ décroît sur $\left[\dfrac{k}{x}\,;+\infty\right[$ et par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n^{(k)}$ vérifie le critère des séries alternées à partir d'un certain rang. Ainsi par contrôle du reste d'une série alternée, on obtient pour n assez grand ($n \geqslant \dfrac{k}{a}$ assure la décroissance car on aura $\dfrac{k}{a} \geqslant \dfrac{k}{x}$)

$$\forall (k,x) \in \mathbb{N} \times [\,a\,;+\infty\,[\qquad \left|\mathrm{R}_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{k!(n+1)^k}{(1+(n+1)x)^{k+1}} \leqslant \frac{k!(n+1)^k}{(1+(n+1)a)^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

On en déduit la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n^{(k)}$ sur tout segment et comme ceci vaut pour tout k entier, les conditions du théorème de classe $\mathscr{C}^k$ pour une série de fonctions sont satisfaites à tout ordre d'où

$$\boxed{\mathrm{S} \in \mathscr{C}^\infty(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

2. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad v_n(x) = \dfrac{(-1)^n x}{1+nx}$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ vérifie le critère des séries alternées d'où, par contrôle du reste

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{x}{1+(n+1)x} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On en déduit la convergence uniforme sur $]\,0\,;+\infty\,[$ de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ et comme on a

$$v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{(-1)^n}{n}$$

on obtient, par théorème de la double limite

$$x\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

D'où
$$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(2)}{x}}$$

3. Soit $x > 0$ et N entier non nul. On a

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{1+nx} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \int_0^1 (-t^x)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (-t^x)^n\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-t^x}{1+t^x}\,\mathrm{d}t + (-1)^{\mathrm{N}} \int_0^1 \frac{(t^x)^{\mathrm{N}+1}}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$$

Or $$0 \leqslant \int_0^1 \frac{(t^x)^{\mathrm{N}+1}}{1+t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (t^x)^{\mathrm{N}+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x(\mathrm{N}+1)} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $$\boxed{\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \int_0^1 \frac{-t^x}{1+t^x}\,\mathrm{d}t}$$

4. On pose $$\forall (x,t) \in [\,0\,;{+\infty}\,[\times]\,0\,;1\,] \qquad f(x,t) = \frac{-t^x}{1+t^x}$$

Pour $x \geqslant 0$, on a $t \mapsto f(x,t)$ continue sur $]\,0\,;1\,]$ et pour $t \in]\,0\,;1\,]$, $x \mapsto f(x,t)$ continue sur $\mathbb{R}_+$ par théorèmes généraux. Enfin

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times]\,0\,;1\,] \qquad 0 \leqslant |f(x,t)| \leqslant 1$$

et la dominante $t \mapsto 1$ est clairement intégrable sur $]\,0\,;1\,]$. Par continuité sous l'intégrale, on conclut

$$\boxed{\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}}$$

Exercice 3 (***)

On pose $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

1. Étudier la définition, la continuité et la dérivabilité de f.
2. Déterminer un équivalent de f en 1^-.

Corrigé : 1. On pose $$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

Si $x \geqslant 1$ ou $x < -1$, on a $|u_n(x)| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ ce qui prouve la divergence grossière. La fonction n'est pas définie en $x = -1$. Si $|x| < 1$, on a

$$|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$$

d'où la convergence absolue de $\sum u_n$ sur $]\,-1\,;1\,[$. On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie sur }]\,-1\,;1\,[.}$$

On a u_0 fonction constante. Soit $a \in [\,0\,;1\,[$. On a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,-a\,;a\,] \qquad \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \leqslant \frac{|x|^n}{1-|x|} \leqslant \frac{a^n}{1-a}$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum u_n$ sur tout segment de $]\,-1\,;1\,[$ d'où

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^0(]\,-1\,;1\,[\,,\mathbb{R})}$$

La série $\sum u_n$ est une série de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,-1\,;1\,[$ qui converge simplement. Par dérivation, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,-1\,;1\,[\qquad u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

Soit $a \in [\,0\,;1\,[$. Il vient

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,-a\,;a\,] \qquad |u_n'(x)| \leqslant \frac{na^{n-1}}{(1-a)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi, la série $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $]\,-1\,;1\,[$ et par conséquent

$$\boxed{f \in \mathscr{C}^1(]\,-1\,;1\,[\,,\mathbb{R})}$$

2. Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$. On pose $\forall t \geqslant 0 \qquad h_x(t) = \dfrac{x^t}{1+x^t} = 1 - \dfrac{1}{1+x^t}$

La fonction h_x est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$, décroissante et positive. Il vient par comparaison série/intégrale pour N entier

$$\int_0^{\mathrm{N}+1} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{2} + \int_0^{\mathrm{N}} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t$$

et faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$ puisque l'intégrale généralisée est de même nature que la série définissant f donc convergente, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = \mathrm{e}^{\,t\ln(x)}$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{1+x^t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(x)}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \frac{\ln(2)}{\ln(x)}$$

Il en résulte alors $\qquad \boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to1^-}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{(1-x)}}$

Exercice 4 (**)

On pose $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} [\mathrm{th}\,(x+n) - \mathrm{th}\,(n)]$

1. Montrer que S est définie, continue, croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$ pour $x \geqslant 0$.
3. Étudier la convergence de S en $+\infty$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \mathrm{th}\,(x+n) - \mathrm{th}\,(n)$$

On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_\infty = 1 - \mathrm{th}\,(n)$

puis $\qquad 1 - \mathrm{th}\,(n) = \dfrac{2\mathrm{e}^{\,-n}}{\mathrm{e}^{\,n} + \mathrm{e}^{\,-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\mathrm{e}^{\,-2n}$

La série $\sum 2\mathrm{e}^{\,-2n}$ est géométrique de raison $\mathrm{e}^{\,-2}$ d'où la convergence absolue de $\sum(1 - \mathrm{th}\,(n))$. La série de fonctions continues $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et comme il s'agit d'une somme de fonctions croissantes, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction S est définie, continue, croissante sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. Par linéarité du symbole somme, il vient

$$\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x+1)-\mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathrm{th}\,(x+n+1)-\mathrm{th}\,(x+n)\right]$$

Par téléscopage $\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x+1)-\mathrm{S}(x)=1-\mathrm{th}\,(x)}$

3. On a $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1-\mathrm{th}\,(n)$

Comme la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[\,0\,;+\infty\,[$, il vient par double limite

$$\boxed{\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty}(1-\mathrm{th}\,(n))}$$

Variante : L'énoncé laisse supposer une autre stratégie. La fonction S est croissante donc admet une limite éventuellement infinie en $+\infty$ par limite monotone. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{S}(n)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\mathrm{S}(k+1)-\mathrm{S}(k)\right]=\sum_{k=0}^{n}\left[1-\mathrm{th}\,(k)\right]$$

Comme la série $\sum(1-\mathrm{th}\,(n))$ converge, la suite $(\mathrm{S}(n))_n$ admet une limite finie pour $n\to+\infty$ et le résultat suit.

Exercice 5 (***)

On pose $\forall x \geqslant 0 \qquad f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{n\ln(n)}$

1. Justifier que f est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ pour $x\to+\infty$.

Corrigé : 1. On pose $\forall n \geqslant 2 \qquad \forall x \geqslant 0 \qquad f_n(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{n\ln(n)}$

Les fonctions f_n sont dérivables avec

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \forall x \geqslant 0 \qquad f_n'(x)=\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n\ln(n)}(1-nx)$$

d'où $\forall n \geqslant 2 \qquad \|f_n\|_\infty=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n^2\ln(n)}=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Ainsi, la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et on obtient

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n'$ converge simplement sur $]\,0\,;+\infty\,[$ puisque $f_n'(x)=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ pour $x>0$ par croissances comparées. S'il y avait convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n'$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$, on aurait par double limite

$$\sum_{n=2}^{+\infty} f_n'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$$

ce qui est absurde puisque la série de Bertrand $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge. Soit $[\,a\,;b\,]\subset\,]\,0\,;+\infty\,[$. On trouve

$$\forall n\geqslant 2\qquad \|f_n'\|_{\infty,[\,a\,;b\,]}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-na}(1+nb)}{n\ln(n)}=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $]\,0\,;+\infty\,[$ et on conclut

$$\boxed{\forall x\geqslant 0\qquad f\in\mathscr{C}^1(]\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

2. On a $f(0)=0$. La fonction $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ décroît sur $]\,0\,;+\infty\,[$ en tant que somme de fonctions décroissantes et admet donc une limite éventuellement infinie en 0^+ par limite monotone. Puis, pour N entier

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}\geqslant\lim_{x\to 0}\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n\ln(n)}=\sum_{n=2}^{\mathrm{N}}\frac{1}{n\ln(n)}$$

Comme $\sum\limits_{n=2}^{\mathrm{N}}\dfrac{1}{n\ln(n)}\xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{}$, il vient par comparaison

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 0^+]{}+\infty$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$

3. Soit $x\geqslant 0$. On a $$f(x)=\frac{x\mathrm{e}^{-2x}}{2\ln(2)}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{n\ln(n)}$$

Puis $$0\leqslant\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{n\ln(n)}\leqslant\frac{x}{3\ln(3)}\sum_{n=3}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\frac{x}{3\ln(3)}\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}=\mathrm{o}(x\mathrm{e}^{-2x})$$

On conclut $$\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x\mathrm{e}^{-2x}}{2\ln(2)}}$$

Exercice 6 (***)

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$ avec

$$\forall(n,x)\in\mathbb{N}^*\times\,]\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(x)=\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$$

Déterminer un équivalent simple de la somme $\mathrm{S}(x)$ pour $x\to+\infty$ et $x\to 0$.

Corrigé : Pour $x>0$, on a $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées d'où la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$. On a $\|f_n\|_\infty=1$ pour tout n entier non nul d'où la divergence grossière de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\|f_n\|_\infty$. Si la série converge uniformément, alors le reste R_n est borné pour n assez grand avec $\|\mathrm{R}_n\|_\infty\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ mais

$$\|f_n\|_\infty=\|\mathrm{R}_{n-1}-\mathrm{R}_n\|_\infty\leqslant\|\mathrm{R}_{n-1}\|_\infty+\|\mathrm{R}_n\|_\infty=\mathrm{o}(1)$$

ce qui est absurde. En revanche, pour $a > 0$, on a $\|f_n\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} = \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur }]\,0\,;+\infty\,[\text{, pas uniformément sur }]\,0\,;+\infty\,[\text{ mais normalement sur tout intervalle } [\,a\,;+\infty\,[\text{ avec } a>0.}$$

Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$ est continue, décroissante, positive sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Par comparaison série/intégrale, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \int_k^{k+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 1 \qquad \mathrm{e}^{-x\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

D'où, après une sommation adéquat, intégrale et somme étant de même nature

$$-1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

et on trouve $$\forall x > 0 \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}$$

ce qui prouve $$\mathrm{S}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$$

Puis, on a $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(\sqrt{n}-1)}$$

On pose $$\forall n \geqslant 2 \qquad \forall x > 0 \qquad v_n(x) = \mathrm{e}^{-x\left(\sqrt{n}-1\right)}$$

On a $\|v_n\|_{\infty,[\,1\,;+\infty\,[} = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}+1} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ d'où la convergence normale sur $[\,1\,;+\infty\,[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ et par double limite, on trouve

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(\sqrt{n}-1)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x(\sqrt{n}-1)} = 0$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{S}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}}$$

Exercice 7 (***)

Déterminer $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

Corrigé : On pose $$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

En changeant l'ordre de sommation, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$$

On pose $$\forall (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad u_k(n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[\![\,0\,;\,n\,]\!]}(k)$$

Avec l'inégalité de concavité classique $\ln(1-u) \leqslant -u$ pour $u < 1$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|u_k\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^{-k}$$

d'où la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_k$ et comme on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u_k(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-k}$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}}$$

Exercice 8 (***)

Soit $f_0 \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. On construit $(f_n)_n$ en posant $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$.

Étudier et évaluer la fonction $g : x \in [\,a\,;b\,] \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

Corrigé : Par récurrence immédiate, on montre $f_n \in \mathscr{C}^n([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ pour n entier et on a $f_n' = f_{n-1}$ pour tout n entier non nul. Notons $\mathrm{M} = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{t\in[\,a\,;b\,]} |f(t)|$. Pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, on a

$$|f_1(x)| = \left|\int_a^x f_0(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x \mathrm{M}\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}(x-a)$$

puis $$|f_2(x)| = \left|\int_a^x f_1(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x \mathrm{M}(t-a)\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}\frac{(x-a)^2}{2}$$

procédé qu'on peut itérer. Notons

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad |f_n(x)| \leqslant \mathrm{M}\frac{(x-a)^n}{n!}$$

La propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vrais pour n entier. Il vient pour $x \in [\,a\,;b\,]$

$$|f_{n+1}(x)| = \left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x \mathrm{M}\frac{(t-a)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ce qui clôt la récurrence. On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f_n\|_\infty \leqslant \mathrm{M}\frac{(b-a)^n}{n!}$$

Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ converge normalement donc simplement et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n' = \sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[\,a\,;b\,]$. Ainsi, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;b\,]$ et par dérivation

$$\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + g(x)$$

Ainsi, la fonction g est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} f' - f = f_0(x) \\ f(a) = 0 \end{cases}$$

On conclut $$\boxed{\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad g(x) = \mathrm{e}^x \left(\int_a^x f_0(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)}$$

Exercice 9 (***)

On pose $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$

1. Justifier que S est bien définie et continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{S}(x)$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$$

Pour $x \geqslant 0$, la série $\sum u_n(x)$ est alternée avec $(|u_n(x)|)_n$ décroissante de limite nulle ce qui prouve que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Notons R_n son reste d'ordre n. D'après le théorème des séries alternées, on a

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \ln\left(1 + \frac{x}{(n+1)(1+x)}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

D'où $\qquad \|\mathrm{R}_n\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Par conséquent, la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction S est bien définie, continue sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

Ainsi, d'après le théorème de la double limite, licite puisqu'on a convergence uniforme, il vient

$$\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Notons $\qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)$

Soit $n \geqslant 1$. En séparant les indices pairs et impairs dans S_{2n}, on trouve

$$\mathrm{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)(2k-1)}{(2k)^2}\right)$$

En complétant, *à la Wallis*, pour faire apparaître des factorielles, on obtient

$$\mathrm{S}_{2n} = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+1)(2k-1)}{(2k)^2} \times \frac{(2k)^2}{(2k)^2}\right) = \ln\left(\frac{(2n+1)(2n)!^2}{(2^n n!)^4}\right)$$

Avec l'équivalent de Stirling $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, il vient

$$\frac{(2n+1)(2n)!^2}{(2^n n!)^4} \underset{n \to +\infty}{\sim} (2n+1) \times \frac{\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{4n} 4\pi n}{2^{4n} \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{4n} (2\pi n)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}$$

Par suite $\qquad \mathrm{S}_{2n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$

Or, la suite $(\mathrm{S}_n)_n$ converge donc la suite extraite $(\mathrm{S}_{2n})_n$ converge vers la même limite et on conclut

$$\boxed{\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)}$$

Exercice 10 (****)

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels deux à deux distincts. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x-a_n|}{2^n\,(1+|a_n|)}$$

1. Justifier que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de F.

Corrigé : 1. On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \qquad f_n(x) = \dfrac{|x-a_n|}{2^n(1+|a_n|)}$

Soit $\alpha \geqslant 0$. On a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times [\,-\alpha\,;\alpha\,] \qquad |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n(1+|a_n|)}\,(|x|+|a_n|) \leqslant \frac{\alpha+1}{2^n}$$

On en déduit que la série de fonctions continues $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $[\,-\alpha\,;\alpha\,]$ d'où

$$\boxed{\text{La fonction F est bien définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. Pour n entier, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a_n\}$. Soit $x_0 \in \mathrm{A} = \mathbb{R} \setminus \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. On pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ f_n'(x_0) & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n'(x_0) = \dfrac{\varepsilon_n}{2^n(1+|a_n|)} \quad$ avec $\quad \varepsilon_n \in \{-1,1\}$

Les fonctions g_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et par inégalité triangulaire inverse

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \qquad \|g_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$$

Par convergence normale et donc uniforme, il vient

$$\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)}{x-x_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x_0)$$

Ainsi, la fonction F est dérivable sur A. Soit n_0 entier. On considère

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a_{n_0}\} \qquad \tau(x) = \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a_{n_0})}{x-a_{n_0}} = \frac{f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a_{n_0})}{x-a_{n_0}} + \sum_{n=0,\ n\neq n_0}^{+\infty} g_n(x)$$

avec les fonctions g_n définies comme précédemment en remplaçant x_0 par a_{n_0}. Pour les même raisons que précédemment, la série de fonctions continues $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0,\ n\neq n_0} g_n$ converge normalement et il vient

$$\sum_{n=0,\ n\neq n_0}^{+\infty} g_n(x) \xrightarrow[x \to a_{n_0}]{} \sum_{n=0,\ n\neq n_0}^{+\infty} g_n(a_{n_0})$$

Enfin, le taux d'accroissement $x \mapsto \dfrac{f_{n_0}(x)-f_{n_0}(a_{n_0})}{x-a_{n_0}}$ n'admet pas de limite pour $x \to a_{n_0}$ et par conséquent la fonction τ non plus. On conclut

$$\boxed{\text{Le domaine de dérivabilité de F est } \mathbb{R} \setminus \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}.}$$

Remarque : Si on ne pense pas à prolonger par continuité la fonction g_n en $x_0 \in \mathrm{A}$ pour n entier, on peut procéder avec le théorème de double limite par les mêmes arguments que ci-avant.