ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026 08/12/2025

Devoir en temps libre n°09

Problème I

Très peu pensent à établir

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;1\,] \qquad x + \frac{x(1-x)}{n} \in [\,0\,;1\,]$$

Ensuite, il faut invoquer l'uniforme continuité en citant le théorème de Heine et exhiber un seuil N entier qui ne dépendent que de η qui ne dépend lui-même que de ε. Beaucoup de rédactions fausses avec des dépendances vis-à-vis de x.

Problème II

1, 2. Le sujet donne la réponse donc il faut évidemment détailler les calculs. Des lourdeurs dans plusieurs copies alors que la formule des chefs permet d'expédier l'égalité.

3. Le sens indirect n'est pas toujours abordé alors qu'il ne présente pas de difficulté.

Problème III

1. Pas toujours bien traitée alors que ce n'est de l'analyse très classique.

2. Il ne faut pas oublier de justifier que l'ensemble $\mathbb{Q} \cap [\,0\,;1\,]$ est infini pour conclure à son caractère dénombrable.

3. Beaucoup de maladresses pour simplement majorer $|f_n|$. La plupart vérifie la convergence normale ce qui est une bonne chose mais quelques-uns s'obstinent à ne pas suivre les recommandations et vérifient laborieusement (et parfois en se trompant) la convergence uniforme sans passer par la convergence normale. Il ne faut pas oublier d'évoquer la continuité des f_n.

4. Beaucoup de confusions. Les fonctions g_n suggérées dans l'énoncé étaient continues ! Très peu l'ont compris. Il fallait majorer $|f'|$ ce qui ne présentait pas de difficulté mais ne faisait pas l'objet d'une question spécifique et que très peu ont fait d'eux-mêmes. On pouvait conclure avec la continuité de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n$ ou un théorème de double limite. Enfin, si le sujet demande seulement la dérivabilité et pas le caractère $\mathscr{C}^1$, c'est très certainement qu'il n'a pas lieu ! (ce que confirmait une simple lecture de la question suivante)

5. Très peu abordée et très peu réussie par ceux qui ont abordé cette question.