

Devoir en temps libre n°09

Problème I

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$. On pose

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0; 1] \quad f_n(x) = f\left(x + \frac{x(1-x)}{n}\right)$$

Étudier le mode de convergence de $(f_n)_n$.

Problème II

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

On rappelle

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On note

$$\forall (u, v) \in [0; 1]^2, u \neq v \quad \tau(u, v) = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$$

1. Établir
$$B_n(f)' = \sum_{k=0}^{n-1} \tau\left(\frac{k+1}{n}, \frac{k}{n}\right) \binom{n-1}{k} X^k (1-X)^{n-1-k}$$

2. Établir

$$B_n(f)'' = (n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \left[\tau\left(\frac{k+2}{n}, \frac{k+1}{n}\right) - \tau\left(\frac{k+1}{n}, \frac{k}{n}\right) \right] \binom{n-2}{k} X^k (1-X)^{n-2-k}$$

3. Montrer que f est convexe si et seulement si f est limite uniforme de fonctions polynomiales convexes.

Problème III

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $\mathbb{Q} \cap [0; 1] = \{r_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec les r_n deux à deux distincts puis on pose

$$\forall x \in [0; 1] \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{avec} \quad \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad f_n(x) = \frac{f(x - r_n)}{2^n}$$

1. Étudier la dérivabilité et le caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction f .

2. Justifier la description proposée de $\mathbb{Q} \cap [0; 1]$.

3. Montrer que la fonction F est bien définie et continue sur $[0; 1]$.

4. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[0; 1]$ et préciser $F'(x)$ sous forme de somme pour $x \in [0; 1]$. Pour $x_0 \in [0; 1]$, on pourra poser

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad g_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ f'_n(x_0) & \text{sinon} \end{cases}$$

et exprimer le taux d'accroissement de F en x_0 à l'aide des fonctions g_n .

5. Étudier la continuité de F' sur $[0; 1]$. On pourra étudier F' en $x_0 \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0; 1]$ puis considérer $F' - f'_{n_0}$ pour n_0 entier.