

I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A.

1. On a $\chi_M = \det(XI_n - M) = \det((XI_n - M)^\top) = \det(XI_n - M^\top) = \chi_{M^\top}$ donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \in \text{sp}(M) \Leftrightarrow \chi_M(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{M^\top}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \text{sp}(M^\top)$$

Ainsi $\text{sp}(M) = \text{sp}(M^\top)$ et donc M et M^\top ont même spectre

2. \Leftarrow : On suppose que M est diagonalisable.

Ceci q nous fournit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $M = PDP^{-1}$

donc $M^\top = (P^{-1})^\top D^\top P^\top = (P^\top)^{-1} D P^\top$ d'où M^\top est diagonalisable

\Rightarrow : On suppose que M^\top est diagonalisable.

Pour montrer que M est diagonalisable, on utilise l'implication précédente en remarquant que $M = (M^\top)^\top$.

On a bien montré que M^\top est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable

I.B. Matrices compagnons

$$3. \text{ On a } \chi_{C_Q}(X) = \det(XI_n - C_Q) = \begin{vmatrix} X & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

On effectue alors les opérations élémentaires pour i allant de $n-1$ à 1 : $L_i \leftarrow L_i + XL_{i+1}$:

$$\chi_{C_Q}(X) = \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & Q(X) \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + \dots + a_2X + a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 & X^2 + a_{n-1}X + a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

On développe ensuite selon la première ligne pour obtenir :

$$\chi_{C_Q}(X) = (-1)^{n+1} Q(X) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} Q(X) (-1)^{n-1}$$

Ainsi Q est le polynôme caractéristique de C_Q

$$4. \text{ On a } (C_Q)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_{C_Q^T} = \chi_{C_Q} = Q$ ainsi $Q(\lambda) = 0$.

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),$$

$$(C_Q)^T X = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 - \dots - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ (-a_0 - a_1 \lambda - \dots - a_{n-1} \lambda^{n-1}) x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } (C_Q)^T X = \lambda X \iff \begin{cases} \forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_i = \lambda^{i-1} x_1 \\ Q(\lambda) x_1 = 0 \end{cases}$$

Notez bien que le "ainsi" concerne toute l'équivalence !

$$\text{Comme } \lambda \text{ est racine de } Q, \text{ alors } \dim(E_\lambda(C_Q^T)) = 1, E_\lambda(C_Q^T) = \text{vect}(X_\lambda) \text{ où } X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

I.C. Endomorphismes cycliques

5. \Rightarrow : On suppose que f est cyclique.

Ceci nous fournit $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E

Il existe alors $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0)$

Je pose alors $Q = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} (-\lambda_i) X^i \in \mathbb{K}[X]$

de sorte que Q est unitaire de degré n et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$

\Leftarrow : On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q , où Q est un polynôme unitaire de degré n

Ainsi $\forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, f(e_i) = e_{i+1}$

donc $(e_0, f(e_0), f^2(e_0), \dots, f^{n-1}(e_0))$ est une base de E et donc f est cyclique

f est cyclique si et seulement s'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q où Q est un polynôme unitaire de degré n

6. \Leftarrow : On suppose que χ_f est scindé sur \mathbb{K} et a toutes ses racines simples.

Ainsi $|\text{sp}(f)| = \deg(\chi_f) = \dim E$

donc f est diagonalisable d'après le cours

\Leftarrow : On suppose que f est diagonalisable. Comme f est cyclique, ceci nous fournit \mathcal{B} une base de E et $Q \in \mathbb{K}[X]$ unitaire de degré n tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = C_Q$ d'après 5. Ainsi C_Q est diagonalisable et il en est de même pour C_Q^\top d'après 2. Ainsi $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(f)} E_\lambda(C_Q^\top)$ d'où $n = \sum_{\lambda \in \text{sp}(C_Q^\top)} \dim(E_\lambda(C_Q^\top))$ or on a $\forall \lambda \in \text{sp}(C_Q^\top), \dim(E_\lambda(C_Q^\top)) = 1$ d'après 4 donc $|\text{sp}(C_Q^\top)| = n$ or d'après 1 : $\text{sp}(C_Q^\top) = \text{sp}(C_Q) = \text{sp}(f)$ donc f admet n valeurs propres distinctes dans \mathbb{K} donc χ_f est scindé sur \mathbb{K} et a toutes ses racines simples

Ainsi f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur \mathbb{K} et a toutes ses racines simples

7. On suppose que f est cyclique.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i f^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrons $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_i = 0$

Comme f est cyclique, ceci nous fournit $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E

donc $\sum_{i=0}^n \lambda_i f^i(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$

ainsi $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_i = 0$ car \mathcal{B} est libre

Alors $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$

Je note d le degré de π_f . D'après le cours on a $d = \dim(\mathbb{K}[f])$.

Or $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathbb{K}[f]$ donc $d \geq n$

de plus d'après Cayley-Hamilton, on a χ_f est annulateur de f

d'où $\pi_f \mid \chi_f$ or ce sont des polynômes non nuls ainsi on a $d = \deg(\pi_f) \leq \deg(\chi_f) = n$

ainsi $n = d$ d'où le polynôme minimal de f est de degré n

On ne se sert pas de cette question pour montrer le théorème de Cayley-Hamilton dans le paragraphe **I.D** qui suit.

I.D. Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

8. On note $N_x = \left\{ m \in \mathbb{N}^* \mid (f^i(x))_{0 \leq i \leq m-1} \text{ libre} \right\}$.

On sait que $1 \in N_x$ car $x \neq 0_E$ et que $\forall m \geq n, m \notin N_x$ car $\dim E = n$

Ainsi N_x est une partie de \mathbb{N}^* non vide majorée par $n-1$

donc N_x admet un plus grand élément $p \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi la famille $(f^i(x))_{0 \leq i \leq p-1}$ est libre et la famille $(f^i(x))_{0 \leq i \leq p}$ est liée

On a bien l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ et de $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tels que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre et $\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$

9. On a $f(\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))) = \text{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^p(x))$ car f linéaire

or $f^p(x) = -\alpha_0 x - \alpha_1 f(x) + \dots - \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) \in \text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$

d'où $f(\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))) \subset \text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$

Ainsi $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est stable par f

10. Je note alors \tilde{f} l'endomorphisme induit par f sur $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$
 D'après ce qui précède $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est une base de $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$
 On remarque que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\tilde{f}) = C_Q$ en notant $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{p-1} X^{p-1} + X^p$
 d'où $\chi_{\tilde{f}} = Q$ or $\chi_{\tilde{f}} | \chi_f$ car \tilde{f} induit par f
 On a montré que $X^p + \alpha_{p-1} X^{p-1} + \dots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f
11. En reprenant les notations précédentes, on a $Q(f)(x) = 0$ et il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = \chi_f$
 Ainsi $\chi_f(f) = P(f) \circ Q(f)$ donc $\chi(f)(x) = P(f)[Q(f)(x)] = P(f)(0) = 0$ car $P(f)$ linéaire
 On a ainsi montré que : $\forall x \in E, \chi(f)(x) = 0$
 or $\chi(f) \in \mathcal{L}(E)$ d'où $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul

II. Etude des endomorphismes cycliques

II.A. Endomorphismes cycliques nilpotents

12. \Rightarrow : On suppose f cyclique alors $\deg(\pi_f) = n$ d'après 7
 De plus d'après le cours, $\chi_f = X^n$ car f nilpotente
 or $\pi_f | \chi_f$ selon Cayley-Hamilton et π_f est unitaire par définition
 donc $\pi_f = X^n$
 ainsi $f^n = 0$ et $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, f^i \neq 0$
 d'où $r = n$
- \Leftarrow : On suppose que $r = n$ donc $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$
 Ceci nous fournit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$
 Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$.
 On montre que $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_i = 0$
 On suppose, par l'absurde, que la propriété est fautive
 Je note alors j le minimum de $\{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \mid \lambda_i \neq 0\}$
 Ainsi $0 = f^{n-1-j} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) \right) = f^{n-1-j} \left(\sum_{i=j}^{n-1} \lambda_i f^i(x) \right) = \lambda_j f^{n-1}(x) + \sum_{i=j}^{n-1} \lambda_i f^{n-1+i-j}(x)$
 Or $\forall i \geq j, f^i(x) = 0$ donc $\lambda_j f^{n-1}(x) = 0$ et $\lambda_j \neq 0$
 d'où $f^{n-1}(x) = 0$ ce qui est absurde
 Ainsi $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une famille libre composée de n vecteurs de E et $\dim E = n$
 donc $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E
 donc f est cyclique.
- On a montré que f est cyclique si et seulement si $r = n$
- On remarque que la matrice compagnon associée est unique car les coefficients de cette matrices sont donnés par ceux du polynôme caractéristique.
- On sait que si f est cyclique et nilpotente, alors $\chi_f = X^n$

ainsi la matrice compagnon de f dans ce cas est
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

II.B.

13. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k}$ et f commutent car $\mathbb{C}[f]$ est une algèbre commutative

donc $\boxed{F_k = \text{Ker}((f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k})}$ est stable par f

On a $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$ et les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux

Alors selon le lemme de décomposition des noyaux, on a

$$\text{Ker}(\chi_f(f)) = \text{Ker}((f - \lambda_1 \text{Id}_E)^{m_1}) \oplus \dots \oplus \text{Ker}((f - \lambda_p \text{Id}_E)^{m_p}) = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$$

de plus selon Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = 0$ et donc $\text{Ker}(\chi_f(f)) = E$

d'où $\boxed{E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p}$

14. Soit $x \in F_k$. On a $(f - \lambda_k \text{Id})(x) = 0$

Pour tout $y \in F_k$, on a $(f - \lambda_k \text{Id})(y) = \varphi_k(y) \in F_k$

ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(f - \lambda_k \text{Id})^p(x) = \varphi_k^p(x)$ par récurrence immédiate sur p

donc $\varphi_k^{m_k}(x) = 0$, comme c'est vrai pour tout $x \in F_k$, on conclut que $\boxed{\varphi_k \text{ est un endomorphisme nilpotent de } F_k}$

15. D'après le cours, l'indice de nilpotence de φ_k , endomorphisme de F_k est majoré par $\dim F_k$

ainsi $\boxed{\nu_k \leq \dim(F_k)}$

16. Je note $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\nu_i}$. Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Soit $x \in F_k$.

$$\text{On a } P(f) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f) \right] \circ (f - \lambda_k \text{Id})^{\nu_k}$$

$$\text{donc } P(f)(x) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f) \right] (\varphi_k^{\nu_k}(x)) = \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (X - \lambda_i)^{\nu_i}(f) \right] (0) = 0$$

donc $P(f)$ coïncide avec l'endomorphisme nul sur chaque F_k et $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ d'après 13

donc $P(f) = 0$

Je note d le degré de P comme P est unitaire alors $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^d)$ est liée

donc $d \geq n$ car $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre

$$\text{or } d = \sum_{i=0}^p \nu_i \text{ d'où } n \leq \sum_{i=0}^p \nu_i$$

On remarque à l'aide de la question 14 que $\nu_k \leq m_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$$\text{donc } n \leq \sum_{k=0}^p \nu_k \leq \sum_{i=0}^p m_k = n$$

ainsi les inégalités sont des égalités et $\boxed{\text{pour tout } k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{ on a } \nu_k = m_k}$

17. Comme $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ d'après 13 et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\nu_k \leq \dim F_k$ d'après 15

on a donc avec la question précédente $n = \sum_{k=1}^p \nu_k \leq \sum_{k=1}^p \dim(F_k) = n$

Comme à la question précédente, on obtient : $\boxed{\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \nu_k = m_k = \dim(F_k)}$

φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k d'indice $\nu_k = m_k = \dim(F_k)$
donc selon 12, φ_k est nilpotent et cyclique.

ceci nous fournit une base \mathcal{B}_k de F_k tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_k}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$

En notant f_k l'endomorphisme induit par f sur F_k ,

on a alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_k}(f_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$

En concaténant les bases \mathcal{B}_k pour k allant de 1 à p

On obtient une base \mathcal{B} adaptée à la décomposition en somme directe $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$

ainsi $\boxed{\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)}$ est une base de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs de formes voulues

Remarque : pour la suite on peut démontrer que pour une telle base on a nécessairement :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (f - \lambda_k \text{Id})^{m_k}(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}) = 0 \text{ puis}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, m_k \rrbracket, u_{m_1+\dots+m_{k-1}+i} \in F_k$$

On peut aussi supposer que l'on travaille avec la base choisie.

18. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1} \in F_k$

ainsi $\forall i \in \mathbb{N}$, $f^i(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}) \in F_k$ car F_k stable par f

puis pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(f)(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}) \in F_k$ car F_k est stable par combinaison linéaire.

Et ainsi $P(f)(x_0) = \sum_{k=1}^p P(f)(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1})$ est la décomposition de $P(f)(x_0)$ sur $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$

Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. On a donc $Q(f)(x_0) = 0 \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(f)(e_k) = 0$

Je note $e_k = u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}$ et on a $\mathcal{B}_k = (e_k, \varphi_k(e_k), \dots, \varphi_k^{m_k-1}(e_k))$ est une base de F_k

On a vu que la matrice de φ_k dans cette base est $C_{X^{m_k}}$

donc $\pi_{\varphi_k} = X^{m_k}$ car φ_k est cyclique et nilpotent et $\dim(F_k) = m_k$ selon 12

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (f - \lambda_k \text{Id})^{m_k}(u_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}) = 0 \text{ puis}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1, m_k \rrbracket, u_{m_1 + \dots + m_{k-1} + i} \in F_k$$

Par ailleurs on montre facilement que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], P(\varphi_k) = 0 \iff P(\varphi_k)(e_k) = 0$$

car $P(\varphi_k)$ commute avec tout φ_k^i et que $(\varphi_k^i(e_k))_{0 \leq i < m_k}$ est une base de F_k .

Par ailleurs on a $Q(\varphi_k) = 0 \iff X^{m_k} | Q$ (nilpotent et cyclique)

$$\text{donc } Q(f)(e_k) = 0 \iff Q(\varphi_k + \lambda_k \text{Id}_{F_k})(e_k) = 0 \iff X^{m_k} | Q(X + \lambda_k)$$

$$\text{ainsi } Q(f)(e_k) = 0 \iff (X - \lambda_k)^{m_k} | Q(X)$$

donc comme les $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux,

$$\text{on a finalement } Q(f)(x_0) = 0 \iff \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k} | Q$$

$$19. \text{ Soit } (\lambda_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0 \text{ Je note } Q = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i X^i \text{ de sorte que } Q(f)(x_0) = 0$$

$$\text{ainsi } \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k} | Q \text{ d'après la question précédente or } \deg(Q) \leq n-1 < n = \deg \left(\prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k} \right)$$

donc Q est le polynôme nul et ainsi $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_i = 0$

donc $(f^i(x_0))_{0 \leq i \leq n-1}$ est une famille libre de n vecteurs de E et $n = \dim E$

d'où $(f^i(x_0))_{0 \leq i \leq n-1}$ est une base de E ce qui justifie que f est cyclique

III. Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

20. L'application $g \mapsto f \circ g - g \circ f$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dont le noyau est $C(f)$

Ainsi $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

De plus, soit g et $h \in C(f)$. On a $(g \circ h) \circ f = g \circ f \circ h = f \circ (g \circ h)$

ainsi $C(f)$ est stable par \circ et il est clair que $\text{Id} \in C(f)$

Ainsi $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$

III.A. Commutant d'un endomorphisme cyclique

21. On a $g(x_0) \in E$ et $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

$$\text{d'où l'existence de } \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \text{ de } \mathbb{K} \text{ tels que } g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$$

22. Il suffit d'établir que les applications linéaires g et $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

On montre par récurrence immédiate que $\forall i \in \mathbb{N}, g \in C(f^i)$

Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. En utilisant 21 et le fait que l'algèbre $\mathbb{K}[f]$ est commutative

$$g(f^i(x_0)) = f^i(g(x_0)) = f^i \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(f^i(x_0))$$

$$\text{donc } g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k \text{ et } \boxed{g \in \mathbb{K}[f]}$$

23. On vient d'établir le sens direct (avec un polynôme de degré $\leq n-1$)

La réciproque vient du fait que $\mathbb{K}[f]$ est une algèbre commutative et que $\mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathbb{K}[f]$.

On conclut que

$$\boxed{g \in C(f) \text{ si et seulement s'il existe un polynôme } R \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \text{ tel que } g = R(f)}$$

III.B. Décomposition de Frobenius

24. On suppose que $G = F_1 \cup \dots \cup F_r$ est un sous espace de E .

Par l'absurde, je suppose qu'aucun des sous-espaces F_i ne contient tous les autres.

Ainsi $r \geq 2$ et $G \neq \{0\}$.

Méthode 1 : Quitte à réduire le nombre, on peut supposer qu'aucun F_i n'est inclus dans la réunion des autres. Cela nous fournit $x_1 \in F_1$ qui n'est dans aucun des F_i pour $i \geq 2$.

Sinon, $F_1 \neq G$ et on peut aussi trouver $y \in G \setminus F_1$.

Pour tout scalaire λ , on a $y + \lambda x_1 \notin F_1$ (car sinon $y \in F_1$) et ainsi $y + \lambda x_1 \in F_2 \cup \dots \cup F_r$.

La droite affine $y + \mathbb{K}x_1$ est donc incluse dans $F_2 \cup \dots \cup F_r$ et contient une infinité d'éléments

car \mathbb{K} est infini et $t \in \mathbb{K} \mapsto y + tx_1$ est injective car $x_1 \neq 0$

Ceci nous fournit $j \in \llbracket 2, r \rrbracket$ et $\lambda \neq \lambda'$ dans \mathbb{K} tel que $y + \lambda x_1 \in F_j$ et $y + \lambda' x_1 \in F_j$

donc $x_1 \in F_j$ (par combinaison linéaire) ce qui est absurde

Méthode 2 : Comme G est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, on peut munir G d'une norme.

De plus les notions topologiques sur G sont indépendantes du choix de la norme car $\dim G < +\infty$.

Comme les F_i sont des sous-espaces de G de dimensions finies, ce sont des fermés de G .

Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Comme $F_i \neq G$, cela nous fournit $e \in G \setminus F_i$.

Soit $x \in F_i$. On a alors : $\forall p \in \mathbb{N}^*, x + \frac{1}{p}e \notin F_i$

Pour toute boule B_x centré en x , il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$, $x + \frac{1}{p_0}e \in B_x$ car $\left(x + \frac{1}{p_0}e\right)_{p \geq 1}$ converge vers x

Ainsi relativement à G , les F_i sont des fermés d'intérieurs vides.

Donc pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\Omega_i = G \setminus F_i$ un ouvert dense dans G

On pose $V_i = \bigcap_{j=1}^i \Omega_j$

On montre par récurrence finie que les V_i ($1 \leq i \leq r$) sont des ouverts non vides de G

Pour l'initialisation c'est évident car $V_1 = \Omega_1$ est dense dans G .

Pour l'hérédité, on suppose pour $i < r$ que V_i est un ouvert non vide

on a $V_{i+1} = V_i \cap \Omega_{i+1}$ est un ouvert (intersection de deux ouverts) et non vide car $V_i \neq \emptyset$ et Ω_{i+1} dense

donc $V_r \neq \emptyset$ et $V_r = G \setminus \left(\bigcup_{j=1}^r F_j\right) = \emptyset$ ce qui est absurde

Ainsi $\boxed{\text{l'un des sous-espaces } F_i \text{ contient tous les autres}}$

Remarque : Pour $r = 2$, il existe une preuve classique purement algébrique. Pour le cas général, la preuve doit utiliser le fait que \mathbb{K} est infini.

En effet, si je prends le corps $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $E = K^2$, $F_1 = \text{Vect}((1, 0))$, $F_2 = \text{Vect}((0, 1))$ et $F_3 = \text{Vect}((1, 1))$.

On a $E = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ et pourtant aucun des sous-espaces F_i ne contient tous les autres.

25. Soit $x \in E$ On considère l'application $\varphi_x : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(f)(x) \in E$.

Comme $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(f)(x) = 0\}$ est le noyau de l'application linéaire φ_x ,

I_x un sous groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$

Pour $P \in I_x$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $QP \in I_x$

car $(QP)(f)(x) = (Q(f) \circ P(f))(x) = Q(f)(P(f)(x)) = 0$ car $Q(f) \in \mathcal{L}(E)$

d'où I_x est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ comme $\pi_f \in I_x$, cet idéal est non réduit à $\{0\}$

ce qui nous fournit $\pi_{f,x} \in \mathbb{K}[X]$ unitaire (donc non nul) tel que $I_x = (\pi_{f,x}) = \{\pi_{f,x}P \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$

On remarque que : $\forall x \in E, \pi_{f,x} | \pi_f$

Si on écrit $\pi_f = \prod_{k=1}^N P_i^{\alpha_i}$ décomposition en facteurs irréductibles, où $N \in \mathbb{N}^*$, les P_i sont irréductibles unitaires et distincts deux à deux et enfin les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

Alors le nombre de diviseurs unitaires de π_f est $\prod_{k=1}^N (\alpha_i + 1)$

Ainsi l'ensemble $\{\pi_{f,x} \mid x \in E\}$ est fini de cardinal noté r où $r \in \llbracket 1, \prod_{k=1}^N (\alpha_i + 1) \rrbracket$

On peut donc choisir $u_1, \dots, u_r \in E$, tel que $\{\pi_{f,x} \mid x \in E\} = \{\pi_{f,u_i} \mid i \in \llbracket 1, r \rrbracket\}$

Ainsi $E = \bigcup_{i=1}^r \ker(\pi_{f,u_i}(f))$ car $\forall x \in E, x \in \ker(\pi_{f,x}(f))$

La question 24 nous fournit $i_0 \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $\ker(\pi_{f,u_{i_0}}(f)) = E$

On note $x_1 = u_{i_0}$ et on a $\ker(\pi_{f,x_1}(f)) = E$

On remarque que $\pi_{f,x_1}(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\pi_f | \pi_{f,x_1}$

or $\pi_{f,x_1} | \pi_f$ et ce sont des polynômes unitaires

donc $\pi_{f,x_1} = \pi_f$ Finalement

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(f)(x_1) = 0 \iff \pi_f | P$$

en faisant comme en 19, on montre que $\boxed{(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)) \text{ est libre}}$

26. En faisant comme en 9, on montre que $\boxed{E_1 \text{ est stable par } f}$

De plus, on a $E_1 = \{P(f)(x_1) / P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\} \subset \{P(f)(x_1) / P \in \mathbb{K}[X]\}$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Comme $\pi_f \neq 0$,

le théorème de la division euclidienne nous fournit Q et $R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\begin{cases} P = Q\pi_f + R \\ \deg(R) < d = \deg(\pi_f) \end{cases}$

On a alors $P(f)(x_1) = [Q(f) \circ \pi_f(f)](x_1) + R(f)(x_1) = R(f)(x_1) \in \{T(f)(x_1) / T \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\}$

On conclut que $\boxed{E_1 = \{P(f)(x_1) / P \in \mathbb{K}[X]\}}$

27. D'après ce qui précède $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_d)$ est une base de E_1 .

De plus on a $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\psi_1) = C_{\pi_f}$ matrice compagnon du π_f polynôme unitaire de degré $d = \dim(E_1)$

alors d'après 5, $\boxed{\psi_1 \text{ est cyclique}}$

28. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $F_i = \text{Ker}(\Phi \circ f^i)$ ainsi $F = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i$ est bien un sous-espace de E

De plus, on a pour $i \geq 1, f(F_i) \subset F_{i-1}$ donc

$$f(F) \subset f\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} F_i\right) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} f(F_i) \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} F_{i-1} = F$$

d'où $\boxed{F \text{ est stable par } f}$

Soit $u \in E_1 \cap F$.

Comme $u \in E_1$, cela nous fournit $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ tels que $u = \sum_{k=1}^d \lambda_k e_k$

or $\Phi(x) = \lambda_d$ et $\Phi(f^0(x)) = 0$ car $u \in F$, donc $\lambda_d = 0$ d'où $u = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k e_k$

puis $f(u) = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k e_{k+1}$ et donc $\lambda_{d-1} = 0$ et $f(u) = \sum_{k=1}^{d-2} \lambda_k e_{k+1}$

En réitérant le procédé, on trouve $\lambda_{d-2} = \dots = \lambda_1 = 0$

donc $u = 0$

L'autre inclusion étant évidente, on a $E_1 \cap F = \{0\}$ d'où $\boxed{E_1 \text{ et } F \text{ sont en somme directe}}$

29. Je note Ψ_1 l'application linéaire induite par Ψ entre E_1 et \mathbb{K}^d .

Soit $x \in \text{Ker}(\Psi_1)$.

On a $x \in E_1$ et $\Phi(x) = \Phi(f(x)) = \dots = \Phi(f^{d-1}(x)) = 0$.

En faisant comme à la question précédente, on obtient $x = 0$

L'autre inclusion étant évidente, on a $\text{Ker}(\Psi_1) = \{0\}$

Ainsi Ψ_1 est une application linéaire injective entre E_1 et \mathbb{K}^d or $\dim(E_1) = d = \dim(\mathbb{K}^d)$

En utilisant le théorème du rang, on obtient que Ψ_1 est surjective puis bijective

Ainsi $\boxed{\Psi \text{ induit un isomorphisme entre } E_1 \text{ et } \mathbb{K}^d}$

30. De la question précédente, on montre que Ψ est surjective de E vers \mathbb{K}^d et que $\ker(\Psi) \cap E_1 = \{0\}$.

Ainsi $\dim(E_1) = d = \text{rg}(\Psi)$ et $\dim(E) = \dim(\ker(\Psi)) + \text{rg}(\Psi) = \dim(\ker(\Psi)) + \dim(E_1)$

donc $E = E_1 \oplus \text{Ker}(\Psi)$

On a $\text{Ker } \Psi = \bigcap_{i=0}^{d-1} F_i$ (les F_i sont introduits en 28) on a donc $F \subset \text{Ker } \Psi$

Soit $x \in \text{Ker}(\Psi)$. Montrons que $x \in F$

Soit $i \in \mathbb{N}$. Il suffit d'établir que $\Phi(f^i(x)) = 0$

Le théorème de la division euclidienne nous fournit Q et $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(R) < d$ et $X^i = Q\pi_f + R$.

On peut écrire $R = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$. On a comme en 26 et car Φ est linéaire

$$\Phi(f^i(x)) = \Phi(0) + \Phi(R(f)(x)) = 0 + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \Phi(f^k(x)) = 0$$

ainsi $F \supset \text{Ker } \Psi$ d'où $F = \text{Ker } \Psi$

on conclut que $\boxed{E = E_1 \oplus F}$

31. **Préambule :** Avant de commencer la construction par récurrence, on remarque que dans ce qui précède le polynôme minimal de f est celui de ψ_1 et donc que $\forall x \in F, \pi_{\psi_1}(f)(x) = 0$

Initialisation : On prend E_1, F et ψ_1 comme ci dessus.

On a E_1 stable par F et ψ_1 cyclique.

On pose $P_1 = \pi_f = \pi_{\psi_1}$, $G_1 = F$ de sorte que $E_1 \oplus G_1 = E$

On a $\forall x \in G_1, P_1(f)(x) = 0$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose avoir l'existence de k sous-espaces vectoriels de E , notés E_1, \dots, E_k et G_k tous stables par f , tels que

- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k \oplus G_k$;
- pour tout $1 \leq i \leq k$, l'endomorphisme ψ_k induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
- si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i , alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq k-1$
- $\forall x \in G_k, P_k(f)(x) = 0$

Si $\dim G_k = 0$, on s'arrête et on pose $r = k$

Sinon, on applique 24 à 30 à l'endomorphisme induit par f sur G_k

On obtient alors E_{k+1} , G_{k+1} sous espaces stables par f et le polynôme P_{k+1} tels que

- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_{k+1} \oplus G_{k+1}$;
- l'endomorphisme ψ_{k+1} induit par f sur le sous-espace vectoriel E_{k+1} est cyclique ;
- si on note P_{k+1} le polynôme minimal de ψ_{k+1} , alors P_{k+1} divise P_k
- $\forall x \in G_{k+1}, P_{k+1}(f)(x) = 0$

On a ainsi la construction voulue au rang k .

Conclusion : Cette construction algorithmique s'arrête car à chaque étape $\dim(E_k) \leq 1$ et donc $r \leq \dim(E)$. car $(\dim G_k)_k$ est une suite à valeurs dans \mathbb{N} strictement décroissante.

On obtient ainsi le résultat voulu.

On en déduit qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E , notés E_1, \dots, E_r , tous stables par f , tels que :

- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$;
- pour tout $1 \leq i \leq r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
- si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i , alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq r-1$.

III.C. Commutant d'un endomorphisme quelconque

32. Je reprends les notations de la questions précédente pour la décomposition de Frobenius de f .

Je note Λ l'application telle que pour $(g_1, \dots, g_r) \in \mathcal{L}(E_1) \times \dots \times \mathcal{L}(E_r)$, on a $\Lambda(g_1, \dots, g_r)$ défini sur E par

$$\Lambda(g_1, \dots, g_r)(x) = g_1(x_1) + \dots + g_r(x_r) \text{ où } x = \sum_{k=1}^r x_k \text{ et les } x_k \in E_k$$

Ainsi définie, Λ est linéaire de $\mathcal{L}(E_1) \times \dots \times \mathcal{L}(E_r)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$

De plus on montre facilement que Λ est injective et que $\Lambda(C(\psi_1) \times \dots \times C(\psi_r)) \subset C(f)$

Ainsi $\dim(C(f)) \geq \dim(C(\psi_1) \times \dots \times C(\psi_r)) = \dim(C(\psi_1)) + \dots + \dim(C(\psi_r))$

or pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, en notant $n_i = \dim E_i$ on a $C(\psi_i) = \text{Vect}(\psi_i^0, \psi_i^1, \dots, \psi_i^{n_i-1})$ d'après 23 du III.A

Comme ψ_i est cyclique alors $(\psi_i^0, \psi_i^1, \dots, \psi_i^{n_i-1})$ est libre d'après 7

donc $\dim(C(\psi_i)) = n_i = \dim(E_i)$ d'où

$$\dim(C(\psi_1)) + \dots + \dim(C(\psi_r)) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_r) = \dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_r) = \dim(E) = n$$

Ainsi la dimension de $C(f)$ est supérieure ou égale à n

33. On note $d = \deg(\pi_f)$. D'après le cours, on a $\dim(\mathbb{K}[f]) = d$

or $\mathbb{K}[f] \subset C(f)$ et $\dim C(f) \geq n$ donc $d \geq n$.

Or on a $\pi_f | \chi_f$ comme conséquence de Cayley-Hamilton ainsi $d \leq n$

donc $d = n$

Or en reprenant les notations précédentes, on a $\dim(E_1) = d = n$

Donc $E_1 = E$ et $\psi_1 = f$ or ψ_1 est cyclique

ainsi f est cyclique