Corrigé du devoir surveillé n°4

Problème I

1. On pose $\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$

Pour n entier non nul, on a $f_n \in \mathscr{C}_{pm}([\,0\,;+\infty\,[,\mathbb{R})$ et $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ d'où l'intégrabilité de f_n sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier non nul, l'intégrale définissant } \mathrm{I}_n \text{ est convergente.}}$$

2. D'après le théorème de changement de variable, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature et égales en cas de convergence. Comme l'intégrande de v_n est positif, on conclut

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier non nul, l'intégrale } v_n \text{ converge absolument et } v_n = \alpha n^{\frac{1}{\alpha}}\mathrm{I}_n.}$$

3. Soit n entier non nul et $u \geqslant 0$. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{u}{n}\right)^k \geqslant \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k}\left(\frac{u}{n}\right)^k$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall u \geqslant 0 \qquad \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u}$$

4. Soit $u \geqslant 0$, on a $\quad \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{u}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n\left(\frac{u}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{u+\mathrm{o}(1)}$

Ainsi $$\boxed{\forall u \geqslant 0 \qquad \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^u}$$

5. On pose $\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad g_n(u) = \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n}$

On observe $$\forall u > 0 \qquad g_n(u) = u^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(1+\frac{u}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{e}^{-u}$$

et $$\forall (n,v) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 \leqslant g_n(u) \leqslant \varphi(u) \quad \text{avec} \quad \varphi(u) = \frac{1}{u^{1-\frac{1}{\alpha}}(1+u)}$$

On a $\varphi \in \mathscr{C}(]\,0\,;+\infty\,[,\mathbb{R}_+$ avec $\varphi(u) \underset{u\to0}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}\right)$ et $\varphi(u) \underset{u\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{u^{2-\frac{1}{\alpha}}}\right)$ en observant que $1-\dfrac{1}{\alpha} < 1$ et $2-\dfrac{1}{\alpha} > 1$. Par critère de Riemann, la dominante φ est intégrable par convergence dominée, on a

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

Remarque : L'intégrabilité de la dominante résulte aussi du résultat de la question 2 pour $n = 1$.

6. On en déduit $$\alpha n^{\frac{1}{\alpha}} \mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

Problème II

1. Notons $$\forall (n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \qquad f_n(t) = \frac{t^n}{1-t^n}$$

L'application f_n n'est pas définie en $t = 1$ et en $t = -1$ pour les n impairs. Pour $|t| > 1$, on a $f_n(t) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ d'où la divergence grossière de la série définissant S. Enfin, pour $|t| < 1$, on a

$$\left|\frac{t^n}{1-t^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} |t|^n$$

d'où la convergence absolue de la série. Ainsi

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de S est } \mathrm{D} = \,]-1\,;1\,[.}$$

2. On a $$\forall t \in \mathrm{D} \qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1-t^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} t^{kn}\right)$$

Vérifions la sommabilité de la famille $\left(|t|^{kn}\right)_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. La série $\sum\limits_{k\geqslant 1} |t|^{kn}$ est géométrique de raison $|t|^n < 1$ donc convergente avec

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} |t|^{kn} = \frac{|t|^n}{1-|t|^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |t|^n$$

et comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} |t|^n$ converge comme somme géométrique de raison $|t| < 1$, on a bien la sommabilité de $\left(|t|^{kn}\right)_{(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. Posons

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_p = \left\{(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ \mid k \times n = p\right\}$$

La famille $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement disjoint de $(\mathbb{N}^*)^2$ et on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}_p = \{(k, p/k),\ k \in [\![1\,;\,p]\!] \quad \text{et} \quad k \text{ divise } p\}$$

D'après le théorème de sommation par paquets, on obtient

$$\forall t \in \mathrm{D} \qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,n)\in \mathrm{A}_p} t^{kn}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{k|p} 1\right) t^p$$

Autrement dit $$\boxed{\forall t \in \,]-1\,;1\,[\qquad \mathrm{S}(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} d(p) t^p}$$

Mines 2017 - MP1
Un corrigé

A. Préliminaires

1. On a bien sûr $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ qui sont non vides (contiennent la fonction nulle) et inclus dans $\mathcal{E}$. Il reste à justifier qiu'ils sont stables par combinaisons linéaires.
   - C'est vrai pour $\mathcal{P}$ (une somme de polynômes est un polynôme et idem pour la multiplication par un scalaire).
   - C'est vrai pour $\mathcal{D}$ car une somme de fonctions DSE est DSE de rayon de convergence au moins égal au minimum des rayons des séries entières initiale (idem pour la multiplication par un scalaire pour laquelle on a le même rayon si le scalaire est non nul).

   En conclusion
   $$\boxed{\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{D} \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } \mathcal{E}}$$

2. Soit $f \in \mathcal{E}$. On doit utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
   - $\forall x \in I,\ t \mapsto f(x\sin(t))$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$ (car $|x\sin(t)| \leq |x| \leq a$ et donc $x\sin(t) \in I$) et donc intégrable sur ce segment.
   - $\forall t \in [0, \pi/2]$, $x \mapsto f(x\sin(t))$ est de classe C^∞ sur I, de dérivée p-ième $x \mapsto (\sin(t))^n f^{(n)}(x\sin(t))$.
   - $\forall x \in I$, $t \mapsto (\sin(t))^n f^{(n)}(x\sin(t))$ est continue sur $[0, \pi/2]$.
   - $\forall x \in I,\ \forall t \in [0, \pi/2],\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ |(\sin(t))^n f^{(n)}(x\sin(t))| \leq \|f^{(p)}\|_{\infty,I}$. Cette quantité existe car $f^{(p)}$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$. Enfin, le majorant constant est intégrable sur le segment $[0, \pi/2]$.

   Le théorème s'applique et montre que
   $$\boxed{\forall f \in \mathcal{E},\ u(f) \in \mathcal{E}}$$
   Il dit aussi que
   $$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u(f)^{(p)}\ :\ x \mapsto \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n f^{(n)}(x\sin(t))\ dt$$
   La linéarité de u est conséquence directe de la linéarité du passage à l'intégrale :
   $$\boxed{u \in \mathcal{L}(\mathcal{E})}$$
   Si $f \in \mathcal{E}$, $f' \in \mathcal{E}$ et comme $v(f) = f(0) + \frac{\pi}{2}\mathrm{Id}_I \cdot u(f')$, $v(f) \in \mathcal{E}$. La linéarité de v découle de celle de u et de la linéarité de la dérivation.
   $$\boxed{v(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E} \text{ et } v \in \mathcal{L}(\mathcal{E})}$$

3. u et v étant linéaires, il suffit de montrer que $u(f_n)$ et $v(f_n)$ sont dans $\mathcal{P}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ où $f_n\ :\ x \mapsto x^n$.
   Un calcul élémentaire donne
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u(f_n) = \frac{2W_n}{\pi} f_n$$
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(v_n) = nW_{n-1}f_n \ \text{ et } \ v(f_0) = 1 = f_0$$
   On a donc montré que
   $$\boxed{u(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P} \text{ et } v(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}}$$

Remarque : on a trouvé des vecteurs propres pour les endomorphismes u et v.

4. Une intégration par parties donne (on primitive $\sin(x)$ et on dérive $\sin^{n-1}(x)$, toutes les fonctions sont de classe C^∞ sur le segment et tout est permis)

$$\forall n \geq 2,\ W_n = \left[-\cos(x)\sin^{n-1}(x)\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^{n-2}(x)\ dx$$

Le terme tout intégré est nul et en utilisant $\cos^2 = 1 - \sin^2$, on obtient $W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \tfrac{n+1}{n+2} W_n}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_n W_{n+1}$$

c'est à dire que la suite de terme général $(n+1)W_nW_{n+1}$ est constante. Or, $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$ et on a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_n W_{n+1} = \tfrac{\pi}{2(n+1)}}$$

5. Aprés intégration des inégalités $(\sin(x))^{n+1} \leq (\sin(x))^n$ pour $x \in [0, \pi/2]$ (conséquence de $\sin(x) \in [0,1]$ pour $x \in [0, \pi/2]$) on obtient $W_{n+1} \leq W_n$, ce qui prouve la décroissance de la suite (W_n). Si, par l'absurde, $W_n - W_{n+1} = 0$ alors l'intégrale de $(\sin(x))^n - (\sin(x))^{n+1}$ est nulle sur $[0, \pi/2]$. Ceci est impossible car la fonction est continue, positive et non nulle. On a donc montré que

$$\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}}$$

Comme (W_n) est décroissante et minorée par 0, elle admet une limite positive ℓ. En passant à la limite dans la relation de la question 4, on obtient que $\ell^2 = 0$ et ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} W_n = 0}$$

On sait que $W_{n-1} \leq W_n \leq W_{n+1}$ et donc (on multiplie par $W_n \geq 0$) $W_{n-1}W_n \leq W_n^2 \leq W_{n+1}W_n$. Avec la relation de la question précédente,

$$\frac{\pi}{2(n-1)} \leq W_n^2 \leq \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Majorant et minorant étant équivalent à la même quantité $\frac{\pi}{2n}$, il en est de même de W_n^2. Comme on peut élever un équivalent à puissance constante, on conclut que

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\tfrac{\pi}{2n}}}$$

B. Etude de la continuité de u et v

6. M est bien définie car une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. L'énoncé ne semble pas demander de prouver que M est une norme. On remarque que

$$\forall f \in \mathcal{E},\ \forall x \in I,\ |u(f)(x)| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} M(f)\ dt = M(f)$$

Le majorant étant indépendant de x, on a donc $M(u(f)) \leq M(f)$. u étant linéaire, ceci montre que u est continue et même 1-lipschitzienne (norme subordonnée majorée par 1).

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme continu de } (\mathcal{E}, M)}$$

7. D'après le calcul de la question 3, et en posant $f_n\ :\ x \mapsto x^n$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M(v(f_n)) = nW_{n-1}M(f_n)$$

Or, $nW_{n-1} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{2}} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Le quotient $M(v(f_n))/M(f_n)$ n'est donc pas borné et

$$\boxed{v \text{ n'est pas un endomorphisme continu de } (\mathcal{E}, M)}$$

8. N est bien définie car si $f \in \mathcal{E}$ alors $f' \in \mathcal{E}$. On a quatre propriétés à vérifier.
   - N est positive ($N(f) \geq 0$ comme somme de quantités positives).
   - N vérifie l'axiome de séparation (si $N(f) = 0$ alors $M(f) = 0$ et donc $f = 0$ car M est une norme).
   - N est homogène car M l'est et car la dérivation est linéaire.
   - N vérifie l'inégalité triangulaire car c'est le cas pour M et car la dérivation est linéaire.

$$\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathcal{E}}$$

On a

$$\forall f \in \mathcal{E},\ \forall x \in I,\ |v(f)(x)| \leq |f(0)| + a\int_0^{\pi/2} M(f')\ dt \leq M(f) + aM(f') \leq (a+1)N(f)$$

Le majorant étant indépendant de x, on conclut que $M(f) \leq (a+1)N(f)$. Ceci montre que l'application linéaire v est $(a+1)$ lipschitzienne de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$ et donc

$$\boxed{v \text{ est continue de } (\mathcal{E}, N) \text{ dans } (\mathcal{E}, M)}$$

Si les normes étaient équivalentes, la continuité ne dépendrait pas du choix de la norme et donc

$$\boxed{N \text{ et } M \text{ ne sont pas équivalentes sur } \mathcal{E}}$$

Remarque : on pourrait montrer que le rapport $N(f_n)/M(f_n)$ n'est pas majoré, et même de limite infinie.

9. Soit $f \in \mathcal{E}$. f' étant continue sur le segment I, elle est uniformément approchable sur I par une suite (q_n) de polynômes (théorème de Weierstrass). Notons p_n l'unique primitive de q_n prenant la valeur $f(0)$ en 0. On a alors $p_n(0) = f(0)$ et $M(p_n' - f') \to 0$. Soit alors $\varepsilon > 0$; il existe un rang n_0 à partir duquel $M(p_n' - f') \leq \varepsilon$. En posant $p = p_{n_0}'$, on a

$$\boxed{p \in \mathcal{P},\ p(0) = f(0),\ \forall x \in I,\ |p'(x) - f'(x)| \leq \varepsilon}$$

Reprenons notre suite (p_n). Par théorème fondamental, $\int_0^x p_n'(t)\ dt = p_n(x) - p_n(0) = p_n(x) - f(0)$ et $\int_0^x f'(t)\ dt = f(x) - f(0)$. Ainsi, (par majoration grossière)

$$\forall x \in [-a, a],\ |p_n(x) - f(x)| = \left|\int_0^x p_n'(t)\ dt - \int_0^x f'(t)\ dt\right| \leq |x|M(p_n' - f') \leq aM(p_n' - f')$$

Le majorant est indépendant de x et donc $M(p_n - f) \leq aM(p_n' - f')$ et finalement

$$N(p_n - f) \leq aM(p_n' - f') + M(p_n' - f') \to 0$$

On a trouvé une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ qui converge au sens de N vers f quelconque dans $\mathcal{E}$, c'est à dire que

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ est dense dans l'espace vectoriel normé } (\mathcal{E}, N)}$$

C. Etude de l'inversibilité de u et v

10. Reprenons les formules de la question 3 (f_n est la fonction $x \mapsto x^n$)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u \circ v(f_n) = nW_{n-1}u(f_n) = nW_{n-1}\frac{2W_n}{\pi}f_n = f_n$$

$$u \circ v(f_0) = u(f_0) = \frac{2W_0}{\pi}f_0 = f_0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v \circ u(f_n) = \frac{2W_n}{\pi}v(f_n) = \frac{2W_n}{\pi}nW_{n-1}f_n = f_n$$

$$v \circ u(f_0) = v(f_0) = f_0$$

Ainsi $u \circ v$ et $v \circ u$ agissent comme l'identité sur $\mathcal{P}$ et, comme ce sont des applications linéaires,

$$\boxed{(u \circ v)|_{\mathcal{P}} = (v \circ u)|_{\mathcal{P}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}}$$

11. Soit $f \in \mathcal{E}$. D'après la question 9, il existe une suite (p_n) d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $N(p_n - f) \to 0$. Comme v est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$, on en déduit que $M(v(p_n) - v(f)) \to 0$. Comme u est continue au sens de M, on en déduit que $M(p_n - u \circ v(f)) = M(u \circ v(p_n) - u \circ v(f)) \to 0$. On a donc (p_n) qui converge vers $u \circ v(f)$ dans $(\mathcal{E}, M)$.
Or, (p_n) converge vers f au sens de N et donc aussi au sens de M (car $M(g) \le N(g)$).
Par unicité de la limite au sens de M, on a donc $u \circ v(f) = f$ et

$$\boxed{u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}}$$

Si $v(f) = 0$ alors $f = u(v(f)) = u(0) = 0$ et v est donc injective :

$$\boxed{0 \text{ n'est pas valeur propre de } v}$$

12. Remarquons tout d'abord qu'avec l'expression de $u(f)'$ de la question 2 on a

$$\forall x \in I,\ |u(f)'(x)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} M(f')\,dt = M(f')$$

et que donc $M(u(f)') \le M(f')$. Avec la question 6, $N(u(f)) \le N(f)$ et u est continue dans $(\mathcal{E}, N)$.
En reprenant les notations de la question précédente, on a $(u(p_n))$ qui converge au sens de N vers $u(f)$ puis $(v \circ u(p_n))$ qui converge au sens de N vers $v \circ u(f)$. Et comme $(v \circ u(p_n)) = (p_n)$ converge au sens de N vers f, l'unicité de la limite donne $v \circ u(f) = f$. Ainsi, comme en question précédente

$$\boxed{u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}}$$

Comme $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ ET $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$,

$$\boxed{u, v \in GL(\mathcal{E}) \text{ et } u^{-1} = v}$$

13. Comme déjà noté en question 2, on a

$$\boxed{v(f) = f(0) + \tfrac{\pi}{2}\mathrm{Id}_I \cdot u(f')}$$

tan est de classe C^1 sur $]0,\pi/2[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur cette intervalle. C'est donc une bonne fonction de changement de variable. En posant $z=\tan(t)$, on a $\sin^2(t)=\frac{z^2}{1+z^2}$ et le changement donne

$$u(\arctan')(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+x^2\sin^2(t)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dz}{1+(1+x^2)z^2}$$

Comme $z\mapsto\arctan(kz)$ se dérive en $z\mapsto\frac{k}{1+k^2z^2}$, on conclut que

$$u(\arctan')(x)=\frac{2}{\pi\sqrt{x^2+1}}\Big[\arctan(\sqrt{x^2+1})z\Big]_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

LA FONCTION argsh N'EST PAS AU PROGRAMME. Si elle l'était, on pourrait écrire que

$$\boxed{u(\arctan')=\mathrm{argsh}'}$$

On utilise le début de la question avec $f=\mathrm{argsh}'\ :\ x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$:

$$v(\mathrm{argsh}')=\mathrm{argsh}(0)+\frac{\pi}{2}\mathrm{Id}_I u(\mathrm{argsh}'')$$

Comme $\mathrm{argsh}(0)=1$ et $v(\mathrm{argsh}')=v\circ u(\arctan')=\arctan'$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x\in I,\ u(\mathrm{argsh}'')(x)=-\tfrac{2x}{\pi(1+x^2)}}$$

14. On suppose que f est paire (resp. impaire). L'expression de u montre directement que $u(f)$ est paire (resp impaire).
On suppose que f est paire. f' est alors impaire et l'expression de v montre que $v(f)$ est paire.
On suppose que f est impaire. On a en particulier $f(0)=0$. De plus, f' est paire et l'expression de v montre alors que $v(f)$ est impaire.
On suppose que $u(f)$ est paire. On a alors $f=v(u(f))$ qui est aussi paire.
On suppose que $u(f)$ est impaire. On a alors $f=v(u(f))$ qui est aussi impaire.
On suppose que $v(f)$ est paire. On a alors $f=u(v(f))$ qui est aussi paire.
On suppose que $v(f)$ est impaire. On a alors $f=u(v(f))$ qui est aussi impaire.
On a donc montré que

$$\boxed{f,\ u(f)\text{ et }v(f)\text{ ont même parité}}$$

D. Etude des valeurs propres de u et v

15. On suppose que λ est valeur propre de v. Il existe alors $f\in\mathcal{E}$ telle que $v(f)=\lambda f$. On a vu en question 11 que $\lambda\neq 0$. En composant par v (et avec la question 11) on trouve $\frac{1}{\lambda}f=u(f)$. $1/\lambda$ est donc valeur propre de u et f est vecteur propre associé.
Le même raisonnement est valable en partant de u et donc

$$\boxed{\lambda\in\mathrm{sp}(v)\iff\tfrac{1}{\lambda}\in\mathrm{sp}(u)\text{ et dans ce cas }E_\lambda(v)=E_{1/\lambda}(u)}$$

16. Soit $f\in\mathcal{D}$. En posant $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, on a l'existence de $R>0$ tel que

$$\forall z\in]-R,R[,\ f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$$

On en déduit que

$$\forall x \in I,\ u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(t)^k x^k \ dt$$

Fixons $|x| < \min(a, R)$ et posons $g_k\ :\ t \mapsto a_k \sin(t)^k x^k$. On a $\|g_k\|_{\infty,[0,\pi/2]} \leq |a_k x^k|$ qui est le terme général d'une série convergente. $\sum(g_k)$ converge donc normalement sur le SEGMENT $[0, \pi/2]$ et on est dans un cas d'interversion licite :

$$\forall |x| < \min(a, R),\ u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k x^k$$

$u(f)$ est donc DSE et

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ est stable par } u}$$

Comme $v(f) = f(0) + \frac{\pi}{2}\mathrm{Id}_I \cdot u(f')$ et comme $\mathcal{D}$ est stable par dérivation et multiplication et somme, on a aussi

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ est stable par } v}$$

17. Comme $f \in \mathcal{E}$, toutes les dérivées de f sont continues. Et comme I est un segment, toutes les quantités m_n existe.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ m_n = \max_{t\in I} |f^{(n)}(t)| \text{ est bien défini}}$$

Comme $u(f) = \lambda f$, on a $u(f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$ et avec l'expression des dérivées obtenue en question 2,

$$\forall x \in I,\ |\lambda| \cdot |f^{(n)}(x)| = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n f^{(n)}(x \sin(t)) \ dt \right| \leq \frac{2m_n}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin(t)|^n \ dt$$

Comme sin est positive sur $[0, \pi/2]$, on a donc

$$\boxed{\forall x \in I,\ |\lambda| \cdot |f^{(n)}(x)| \leq \frac{2m_n W_n}{\pi}}$$

Le majorant étant indépendant de x, on a en particulier,

$$|\lambda| \cdot m_n \leq \frac{2m_n W_n}{\pi}$$

S'il existe n tel que $m_n = 0$ alors $f^{(n)}$ est nulle sur I et f est polynomiale. Sinon, on peut diviser par m_n et faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir $\lambda = 0$. Ceci est exclus avec la question 12. Ainsi

$$\boxed{f \in \mathcal{P}}$$

18. Soit f un vecteur propre de u. On vient de voir que c'est un polynôme. Notons n son degré. Les calculs de la question 3 montrent que l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des fonctions polynomiales de degré $\leq n$ est stable par u et que $u|_{\mathcal{P}_n}$ admet des valeurs propres $\frac{2W_k}{\pi}$ pour $0 \leq k \leq n$. On obtient $n+1$valeurs propres (distinctes par strice monotonie de (W_k)) dans un espace de dimension $n+1$. On les as toutes et tous les sous-espaces propres sont des droites. En particulier, f est multiple de l'un des vecteurs propres trouvés. On peut ainsi affirmer que

$$\boxed{\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_k = \tfrac{2W_k}{\pi} /\ k \in \mathbb{N}\} \text{ et } E_{\lambda_k}(u) = \mathrm{Vect}(x \mapsto x^k)}$$

La question 15 donne alors

$$\boxed{\mathrm{sp}(v) = \{\mu_k = \tfrac{\pi}{2W_k} /\ k \in \mathbb{N}\} \text{ et } E_{\mu_k}(v) = \mathrm{Vect}(x \mapsto x^k)}$$

19. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (avec $f_k(x) = x^k$) étant une base de $\mathcal{P}$ strictement inclus dans $\mathcal{E}$ (par exemple, la fonction exponentielle n'est pas polynoimiale car aucune de ses dérivées n'est nulle), on n'a pas de base de $\mathcal{E}$ de vecteurs propres pour u ou v.
Comme $\lambda_k \to 0$ quand $k \to +\infty$ et 0 n'est pas valeur propre,

$$\boxed{\mathrm{sp}(u) \text{ n'est pas une partie fermée de } \mathbb{C}}$$

Une suite convergente d'élements du spectre de v est bornée et ne contient qu'un nombre fini d'éléments. Elle stationne donc à partir d'un certain rang et sa limite est donc dans le spectre. Ainsi

$$\boxed{\mathrm{sp}(v) \text{ est une partie fermée de } \mathbb{C}}$$